X Maths PC 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Walter Appel (Professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (Professeur agrégé).

Le sujet de l'École Polytechnique de cette année est particulièrement original. On aurait tendance à dire qu'il s'agit d'algèbre, et pourtant pratiquement aucune connaissance de cours n'est nécessaire à part quelques outils d'analyse ! Comme bien souvent dans ce genre de cas, la difficulté est élevée en grande partie à cause de l'originalité des questions.

Le sujet est composé de deux parties qui sont dans une très large mesure indépendantes. Il traite de vecteurs et de polynômes à coefficients dans l'ensemble $\{-1, 1\}$. On cherche des couples de tels objets satisfaisant certaines conditions dites de *complémentarité*. L'ensemble des entiers ℓ pour lesquels il existe deux vecteurs de taille ℓ (respectivement deux polynômes de degré $\ell - 1$) satisfaisant ces conditions est noté $\mathcal{L}$.

- La première partie s'attache à trouver des conditions nécessaires pour qu'un entier ℓ soit un élément de $\mathcal{L}$. À part une brève utilisation des équivalents de fonctions et un tout petit peu d'arithmétique, on peut la traiter sans aucune connaissance de cours.
- La deuxième partie est un peu plus proche de ce qui peut être demandé habituellement. On montre un certain nombre de propriétés portant sur deux familles de polynômes. Naturellement, il faut utiliser à de nombreuses reprises le raisonnement par récurrence (certaines preuves sont relativement longues à rédiger). Les séries entières font leur apparition en toute fin de sujet et ce pour deux petites questions.

Il ne s'agit certainement pas d'un sujet destiné à contrôler la maîtrise des connaissances du cours. En revanche, c'est sûrement un très bon test pour vérifier que vous savez produire des raisonnements moins classiques, ce qui est nécessaire pour présenter les concours de l'École Polytechnique et des Écoles Normales Supérieures.

Indications

1 Pour montrer que 3 n'appartient pas à $\mathcal{L}$, montrer que si la deuxième condition de complémentarité est satisfaite, alors la première ne peut pas l'être.

2.a Déterminer les équivalents en $+\infty$ des fonctions

$$x \longmapsto \mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) \quad et \quad x \longmapsto \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1})$$

Pour la deuxième partie de la question, développer l'expression $\mathrm{P}_a(x)\mathrm{P}_a(x^{-1})$, puis regrouper dans la double somme obtenue les termes suivant l'exposant de x.

2.b Si $\mathrm{P}_{\underline{a}}(1)$ et $\mathrm{P}_{\underline{b}}$ sont de même parité, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{P}_{\underline{a}}(1)$ soit égal à $\mathrm{P}_{\underline{b}}(1) + 2m$. Utiliser alors des identités remarquables pour écrire comme somme de deux carrés l'entier $(\mathrm{P}_{\underline{a}}(1)^2 + \mathrm{P}_{\underline{b}}(1)^2)/2$.

2.c Montrer qu'un entier de la forme $4k+3$ ne peut s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers.

3.a Développer l'expression $\mathrm{U}(x)\mathrm{U}(x^{-1}) + \mathrm{V}(x)\mathrm{V}(x^{-1})$ et l'exprimer en fonction de $\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1})$.

3.b Calculer les fonctions $\mathrm{U}(x)$ et $\mathrm{V}(x)$ pour ces séquences, puis utiliser le résultat de la question précédente.

4 Introduire les ensembles

$$\mathrm{I} = \{i \in [\![\, 0\,;\, 2m-1\,]\!], \quad v_i = 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \{i \in [\![\, 0\,;\, 2m-1\,]\!], \quad v_i = -1\}$$

puis exprimer la somme et le produit des éléments $v_0, \ldots, v_{2m-1}$ en fonction du cardinal de J.

5.a Introduire la séquence proposée par l'énoncé et remarquer que la somme de ses termes est nulle (donc multiple de 4) en raison de la j-ième condition de complémentarité.

5.b Considérer le quotient de deux relations consécutives obtenues à la question précédente.

5.c Si ℓ est impair, regarder ce que donne la relation précédente avec un choix de j judicieux.

6.b Utiliser les formules de récurrence (**1**) et (**2**) du problème pour en déduire une relation de récurrence entre ces suites. Interpréter matriciellement cette relation.

7 Montrer par récurrence que les polynômes P_n et Q_n sont à coefficients entiers, de degré $2^n - 1$ et que la fonction de la variable réelle

$$x \longmapsto \mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_n(x^{-1}) + \mathrm{Q}_n(x)\mathrm{Q}_n(x^{-1})$$

est constante.

8 Raisonner une nouvelle fois par récurrence.

9.a Considérer une racine z de T. Traiter dans un premier temps le cas $|z| \leqslant 1$. Pour l'autre cas, commencer par majorer grossièrement $|z|^d$ en utilisant le fait que z est racine de T.

9.b Utiliser le fait que P_n et Q_n sont à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et le résultat de la question précédente.

10.a Remarquer que les 2^n premiers coefficients de P_n sont les mêmes que les 2^n premiers de P_{n+1}.

10.b Considérer une racine de S de module strictement inférieur à $1/2$. Utiliser le fait que S est à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et l'inégalité triangulaire pour minorer le module de $\mathrm{S}(z)$.

Première partie

1 Considérons une paire de séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de longueur 2. Pour une telle longueur de séquence, il n'y a qu'une seule condition de corrélation qui s'écrit

$$a_0a_1 + b_0b_1 = 0$$

Il suffit donc de prendre $\underline{a} = (1, 1)$ et $\underline{b} = (-1, 1)$ pour la satisfaire. Par conséquent,

$$\boxed{\text{L'entier 2 est un élément de } \mathcal{L}.}$$

Considérons maintenant des séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de longueur 3. Il y a alors deux conditions de corrélation qui sont données par

$$a_0a_2 + b_0b_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_0a_1 + a_1a_2 + b_0b_1 + b_1b_2 = 0$$

Supposons la première condition satisfaite. Puisque les quatre coefficients a_0, a_2, b_0, b_2 sont des éléments de $\{-1, 1\}$, alors celle-ci impose que

$$a_0a_2 = -1 \quad \text{et} \quad b_0b_2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad a_0a_2 = 1 \quad \text{et} \quad b_0b_2 = -1$$

Quitte à échanger les rôles de $\underline{a}$ et $\underline{b}$, on peut supposer que ce sont a_0 et a_2 qui sont opposés et que $b_0 = b_2 = \pm 1$. Dans ce cas, il vient

$$a_0a_1 + a_1a_2 = a_1(a_0 + a_2) = 0$$

ce qui entraîne $\quad |a_0a_1 + a_1a_2 + b_0b_1 + b_1b_2| = |b_1|\,|b_0 + b_2| = 2 \neq 0$

Les deux conditions de corrélation ne peuvent ainsi être simultanément satisfaites. Il n'existe donc aucune paire de séquences complémentaires de longueur 3, ce qui veut dire que

$$\boxed{\text{L'entier 3 n'est pas un élément de } \mathcal{L}.}$$

2.a Soit $\underline{a}$ une séquence de longueur ℓ_1 et $\mathrm{P}_{\underline{a}}$ le polynôme séquentiel associé. Pour simplifier, on note également $\mathrm{P}_{\underline{a}}$ sa fonction polynomiale associée. Cette fonction est alors continue et équivalente en l'infini à son terme de plus haut degré. Or, celui-ci est le terme de degré $\ell_1 - 1$, puisque a_{ℓ_1-1} est non nul car il appartient à l'ensemble $\{-1, 1\}$. On a ainsi

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_{\ell_1-1}x^{\ell_1-1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) = \mathrm{P}_{\underline{a}}(0) = a_0$$

ce qui donne par conséquent l'équivalent

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_0a_{\ell_1-1}x^{\ell_1-1}$$

> Rappelons que les produits de ces équivalents ne sont valides que parce que a_0 n'est pas nul (il appartient lui aussi à l'ensemble $\{-1, 1\}$). Nous nous permettrons de ne plus refaire ce type de justification dans tout le corrigé, en particulier de mentionner à chaque instant que les éléments d'une séquence sont non nuls (pour des divisions par exemple).

Soit maintenant $\underline{b}$ une seconde séquence de longueur ℓ_2 différente de ℓ_1. Quitte à échanger les séquences, on peut supposer que ℓ_2 est strictement inférieur à ℓ_1 et donc $\ell_1 \geqslant 2$, puisque ℓ_2 est par définition supérieur à 1. Le même raisonnement que précédemment montre que la fonction polynomiale associée à $\mathrm{P}_{\underline{b}}$ admet en $+\infty$ l'équivalent

$$\mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) \underset{x\to+\infty}{\sim} b_0b_{\ell_2-1}x^{\ell_2-1} = \mathrm{o}\left(x^{\ell_1-1}\right)$$

On a donc l'équivalent suivant en $+\infty$

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_0 a_{\ell_1-1} x^{\ell_1-1}$$

ce qui montre que la fonction tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$ (selon le signe de $a_0 a_{\ell_1}$) et n'est en particulier pas bornée. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Si } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ ne sont pas des séquences de même longueur, la fonction } x \longmapsto \mathrm{P}_{\underline{a}}\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) \text{ n'est pas bornée sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

Considérons maintenant deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur ℓ et un réel x non nul. Le réel $\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1})$ peut s'écrire en fonction des coefficients de $\underline{a}$

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) = \left(\sum_{k=0}^{\ell-1} a_k x^k\right)\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} a_i x^{-i}\right) = \sum_{0\leqslant k,i\leqslant \ell-1} a_k\, a_i\, x^{k-i} \qquad (\mathbf{a})$$

Regroupons maintenant dans cette double somme les termes suivant l'exposant de x.

- Les termes d'exposant 0 sont ceux pour lesquels $i = k$, avec $i \in [\![\,0\,;\,\ell-1\,]\!]$. Il y en a ainsi ℓ et le coefficient de x^0 dans $(\mathbf{a})$ est donné par
$$\sum_{i=0}^{\ell-1} {a_i}^2 = \ell$$
puisque les éléments $a_0, \ldots, a_{\ell-1}$ sont dans l'ensemble $\{-1, 1\}$.
- Pour chaque $j \in [\![\,1\,;\,\ell-1\,]\!]$, pour avoir $k - i = j$, l'indice i peut varier entre 0 et $\ell - 1 - j$, et alors $k = i + j$. Le coefficient de x^j dans la somme $(\mathbf{a})$ est donc
$$\sum_{i=0}^{\ell-1-j} a_{i+j}\, a_i$$
- Enfin, la fonction $x \mapsto \mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1})$ est symétrique par l'opération $x \mapsto x^{-1}$: on a donc les mêmes valeurs pour les puissances négatives de x (c'est-à-dire en regroupant les termes pour lesquels $k - i = j < 0$).

Le réel $\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1})$ s'écrit donc finalement

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) = \ell + \sum_{j=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-1-j} a_i a_{i+j}\right)\left(x^j + x^{-j}\right)$$

En effectuant les mêmes calculs pour le terme $\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1})\mathrm{P}_{\underline{b}}(x)$, on obtient ainsi

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) = 2\ell + \sum_{j=1}^{\ell-1}\left(\sum_{i=0}^{\ell-j-1} a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}\right)\left(x^j + x^{-j}\right)$$

ce qui montre que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont deux séquences complémentaires, alors la fonction est constante égale à 2ℓ.

Réciproquement, supposons qu'il existe au moins un entier $j > 1$ tel que la somme $\sum\limits_{i=0}^{j} a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}$ soit non nulle. Soit j_0 le plus grand d'entre eux. Alors,

$$\mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1-j_0} a_i a_{i+j_0} + b_i b_{i+j_0}\right) x^{j_0-1}$$

ce qui montre que la fonction n'est pas bornée et donc pas constante. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Deux séquences } \underline{a} \text{ et } \underline{b} \text{ de même longueur } \ell \text{ sont complémentaires si et seulement si la fonction } x \mapsto \mathrm{P}_{\underline{a}}(x)\mathrm{P}_{\underline{a}}(x^{-1}) + \mathrm{P}_{\underline{b}}(x)\mathrm{P}_{\underline{b}}(x^{-1}) \text{ est constante. Elle est alors égale à } 2\ell.}$$