Mines Physique 1 MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémy Hervé (ENS Lyon) ; il a été relu par Vincent Fourmond (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose l'étude de phénomènes électromagnétiques associés à la transmission d'informations à l'aide de fibres optiques et d'antennes.

La première partie est consacrée à l'étude de la propagation d'ondes dans une fibre optique. Après une analyse relativement traditionnelle d'une fibre à saut d'indice destinée à introduire les notions clefs abordées par le problème, on compare ces premiers résultats à ceux obtenus pour une fibre à gradient d'indice où la lumière se propage en courbe (de la même façon que pour un mirage). Il s'agit d'une bonne occasion de s'initier à la question très actuelle du transport de l'information par fibres optiques et des débits qu'il permet d'atteindre, par exemple dans le cadre de son application aux télécommunications.

Cette partie ne présente pas de grandes difficultés, mais elle nécessite une bonne maîtrise des calculs géométriques, très fréquents en optique, et des lois de Snell-Descartes au passage d'une interface.

La seconde partie porte sur l'étude d'antennes. Dans un premier temps, on retrouve les résultats pour l'onde émise par une antenne seule, pour considérer ensuite une collection d'antennes disposées en réseau. Cette analyse permet de réviser et d'approfondir le cours sur le dipôle oscillant et les antennes, et de découvrir un autre aspect de l'optique interférentielle.

Il s'agit donc essentiellement de questions de cours, mais sur l'un des points les plus techniques du programme. L'énoncé est suffisamment bien posé pour permettre d'avancer et de retrouver des résultats dès lors qu'on ne se laisse par impressionner par des formules assez complexes. Il est toutefois requis, tout au long du problème, d'avoir une bonne connaissance de l'optique interférentielle, des propriétés des ondes et des approximations que l'on peut y associer. Enfin, comme pour la première partie, une bonne maîtrise des calculs géométriques est indispensable pour plusieurs questions.

En résumé, ce sujet traite de façon intéressante des questions proches des sciences et techniques actuelles. Il ne présente pas de difficulté majeure, mais il est peut-être un peu trop long pour pouvoir être traité dans le temps imparti. Toutefois, l'énoncé souffre d'ambiguïtés et d'erreurs qui ont certainement perturbé nombre de candidats.

Indications

Partie I

4 Considérer le cas particulier où P est en B. En déduire ensuite le cas général. Attention, il y a une faute de frappe dans la formule : il faut lire λ au lieu de λ_0.

5 L'écart de phase entre P et P′ doit être $\varphi = 2\,\pi\, m$ (m entier). Penser à l'inégalité vérifiée par θ pour que l'onde soit guidée.

6 Se rappeler que $\theta_{\mathrm{L}} < \theta < \pi/2$.

7 Utiliser le résultat de la question 5.

8 Pour le trajet maximal, décomposer le chemin en allers-retours entre les parois de la fibre. En déterminer alors le nombre qu'il est nécessaire d'effectuer pour parcourir toute sa longueur. Attention, il ne faut pas calculer $\mathrm{R}_{\mathrm{max}}^{\mathrm{saut}}$ mais l'exprimer.

9 Utiliser les lois de Snell-Descartes et les symétries du système pour démontrer que la propagation a lieu dans un plan.

10 L'ouverture numérique correspond à l'ensemble des rayons guidés, c'est-à-dire aux rayons qui n'atteignent jamais le domaine $r > a$ où $n(r) = n_2$.

11 Les symétries de l'équation 9, qui donne les trajectoires dans l'espace des phases, permettent de n'étudier que le domaine $r > 0$ et $\mathrm{d}r/\mathrm{d}z > 0$ du portrait de phase.

Partie II

15 Exprimer $\mathrm{d}\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}_{\mathrm{P}}$ en fonction de $\mathrm{d}\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}_{\mathrm{O}}$ pour identifier le terme de phase, puis le calculer à l'ordre le plus bas en z/r .

16 Une onde sphérique est une onde dont les surfaces équiphases sont des sphères concentriques.

18 Dans le vide, les ondes sphériques sont localement planes.

19 Introduire la valeur moyenne de $\overrightarrow{\Pi}$ sur une période T

$$\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle_t = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \overrightarrow{\Pi}\;\mathrm{d}t$$

22 Utiliser l'approximation de la question 20.

23 Prendre l'expression du champ obtenue à la question 17 pour $\theta = \pi/2$.
Attention, $\overrightarrow{u}_{\pi/2} = -\overrightarrow{u_z}$.

24 Il est plus simple de calculer d'abord le champ complexe.

26 Pour déterminer la largeur du pic, chercher le premier zéro de la fonction. Ici encore, il s'agit d'exprimer et non de calculer.

28 Il semble y avoir ici une erreur d'énoncé. Pour répondre à cette question, supposer qu'il y a $\mathrm{N}+1$ antennes numérotées de 0 à N. Prendre garde à la conjugaison complexe dans les dérivations !

29 Discuter les propriétés de directivité et d'intensité des ondes générées.

Ondes électromagnétiques : morceaux choisis

Préliminaire

1 La bande spectrale des micro-ondes s'étend de 3 mm à 1 m tandis que le proche infrarouge va de 800 nm à 5 μm. Par ailleurs, c'est Heinrich Hertz qui, en 1887, a pour la première fois produit et détecté des ondes gigahertz.

I. Guidage par fibre optique

1. Fibre optique à saut d'indice

2 Après avoir pénétré dans la fibre, le rayon se propage jusqu'à rencontrer l'interface cœur/gaine en $r = a$ avec un angle d'incidence θ. D'après les lois de Snell-Descartes, il est alors en partie réfléchi dans le cœur avec le même angle θ et en partie transmis dans la gaine avec un angle θ' vérifiant

$$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta'$$

Or, comme $n_2 < n_1$, il existe un angle θ_L au-delà duquel

$$n_1 \sin\theta > n_2$$

Dans ce cas, il n'existe plus d'angle θ' solution de l'équation précédente. Ainsi, pour un angle d'incidence $\theta > \theta_\mathrm{L}$, il n'y a pas de rayon transmis dans la gaine : le rayon incident est réfléchi totalement dans le cœur où il se propage jusqu'à rencontrer de nouveau une interface cœur/gaine qu'il aborde sous le même angle θ et où il est, par conséquent, également entièrement réfléchi. Le rayon est donc guidé dans le cœur.

L'angle d'incidence critique θ_L est donné par le cas limite

$$n_1 \sin\theta_\mathrm{L} = n_2$$

donc par

$$\boxed{\sin\theta_\mathrm{L} = \frac{n_2}{n_1}}$$

Pour $n_1 = 1,456$ et $n_2 = 1,410$, on trouve

$$\boxed{\theta_\mathrm{L} = 1,319 \text{ rad} = 75,6^\circ}$$

3 À l'entrée de la fibre, les lois de Snell-Descartes donnent

$$\sin i = n_1 \sin r$$

puisque le milieu extérieur a l'indice du vide. Par ailleurs, on déduit l'angle r de l'angle θ par la relation $r + \theta + \pi/2 = \pi$, soit

$$r = \frac{\pi}{2} - \theta$$

La première relation devient alors

$$\sin i = n_1 \cos\theta = n_1 \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

D'après la question précédente, le guidage a lieu si $\theta > \theta_{\mathrm{L}}$, donc si

$$\sin i < \sin i_{\max}$$

avec

$$\begin{aligned}\sin i_{\max} &= n_1 \sqrt{1-\sin^2\theta_{\mathrm{L}}}\\ &= n_1\sqrt{1-\frac{{n_2}^2}{{n_1}^2}}\\ \sin i_{\max} &= \sqrt{{n_1}^2-{n_2}^2}\end{aligned}$$

Soit, en utilisant $\Delta = n_1 - n_2$ et en ne gardant que le terme d'ordre le plus bas en Δ,

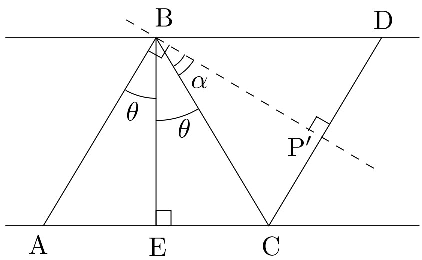
$$\boxed{i_{\max} = \mathrm{Arcsin}\,\sqrt{2\,n_1\,\Delta}}$$

L'ouverture numérique vaut alors

$$\boxed{\sin i_{\max} = 0,367}$$

$\boxed{4}$ Dans un premier temps, considérons le cas particulier où P est en B et notons α l'angle $\widehat{\mathrm{CBP}'}$ et E le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Le triangle BCE étant rectangle en E, on en déduit

$$\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{BE}}{\cos\widehat{\mathrm{EBC}}} = \frac{a}{\cos\theta}$$



Par ailleurs, comme (BP′) est un plan d'onde, il est orthogonal au rayon lumineux. Ainsi, BCP′ est rectangle en P′, d'où

$$\mathrm{CP}' = \mathrm{BC}\,\sin\alpha = a\,\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}$$

De même, $\widehat{\mathrm{ABP}'}$ est droit, ce qui conduit à

$$2\,\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Il en résulte

$$\mathrm{CP}' = a\,\frac{\cos(2\,\theta)}{\cos\theta} = 2\,a\cos\theta - \frac{a}{\cos\theta}$$

On trouve alors pour l'écart de phase, noté φ_0 pour ce cas particulier,

$$\varphi_0 = 2\,\pi\,n_1\,\frac{\mathrm{BC}+\mathrm{CP}'}{\lambda} = 4\,\pi\,n_1\,\frac{a}{\lambda}\cos\theta$$

On peut à présent déduire le cas général de ce cas particulier. En effet, on peut décomposer l'expression de la phase φ correspondant au cas général pour faire apparaître explicitement les points B et P'_0 du cas précédent, ce qui donne

$$\varphi = 2\,\pi\,n_1\,\frac{\mathrm{PB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CP}'_0-\mathrm{P}'_0\mathrm{P}'}{\lambda} = \varphi_0 + 2\,\pi\,n_1\,\frac{\mathrm{PB}-\mathrm{P}'_0\mathrm{P}'}{\lambda}$$