Mines Maths 2 MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Lévy (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (ENS Cachan).

Ce problème propose d'étudier le comportement asymptotique des racines de la suite des polynômes P_n', où

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - k)$$

Il est constitué de trois parties, les deux premières étant totalement indépendantes.

- La première partie, qui vise à étudier quelques propriétés élémentaire des racines de P_n', est relativement simple. Elle ne demande pas l'utilisation de théorèmes complexes.
- Dans la deuxième partie, on étudie la fonction Γ que l'on retrouve chaque année à l'heure des concours. Les quatre premières questions établissent ses propriétés les plus courantes. Les suivantes nous font étudier la fonction Γ'/Γ. Cette partie est beaucoup plus difficile que la précédente et demande astuce et dextérité dans le maniement des théorèmes d'intégration.
- La troisième et dernière partie s'articule essentiellement autour d'une question particulièrement calculatoire (la question 25). Elle vise à préciser le comportement asymptotique des racines des polynômes P_n'.

Nous avons là un assez beau sujet d'analyse qui passe en revue un grand nombre des propriétés des polynômes réels et une large partie des notions d'intégration. Les calculs, quoiqu'assez longs, sont relativement simples et ne devraient pas poser de problèmes majeurs si l'on parvient à rester lucide jusqu'au bout.

Indications

Partie I

1 Commencer par montrer que P_n' admet au moins une racine dans chaque intervalle $]\,k\,;k+1\,[$, puis qu'il n'y en a pas d'autre.

2 Exprimer les coefficients du polynôme P_n' en fonction de ceux du polynôme P_n.

4 Utiliser la question 3.

7 Dériver la relation $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-n)\mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{X})$.

8 Utiliser les questions 5 et 7.

9 Dériver la relation $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\mathrm{P}_{n-1}(\mathrm{X}-1)$.

10 Utiliser les questions 5 et 9.

11 Utiliser les questions 8 et 10.

Partie II

13 Les fonctions h_x sont non nulles.

14 Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral.

15 Intégrer $\Gamma(x+1)$ par parties de façon à faire apparaître $\Gamma(x)$.

16 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

17 Dériver la relation obtenue à la question 15.

18 Utiliser la question 17.

19 Utiliser la question 18.

20 Utiliser la question 16.

22 Utiliser la question 15, la formule de Stirling et la question précédente.

Partie III

24 Le réel $x_{n,k} = \alpha_{n,k} + k$ est une racine de P_n'.

25 Établir

$$\sum_{[nt]}^{n} \frac{1}{j} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln t \qquad \text{et} \qquad \sum_{n-[nt]}^{n} \frac{1}{j} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln(1-t)$$

puis utiliser les résultats de la partie II et de la question 24.

26 Dériver la relation (A) pour évaluer la différence $\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n)$ et utiliser la question précédente.

I. Quelques propriétés des racines de P'_n

1 Soient $n \geqslant 1$ et $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. La fonction $x \longmapsto \mathrm{P}_n(x)$ vaut 0 en k et en $k+1$. Comme elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]\,k\,;k+1\,[$ et continue sur l'intervalle fermé $[\,k\,;k+1\,]$, d'après le théorème de Rolle, sa dérivée s'annule au moins une fois sur l'intervalle ouvert $]\,k\,;k+1\,[$. En d'autres termes, le polynôme dérivé P'_n admet au moins une racine dans l'intervalle $]\,k\,;k+1\,[$.

Comme le polynôme P_n est de degré $n+1$, son polynôme dérivé P'_n est lui de degré n et admet donc au plus n racines. Puisqu'il en admet au moins une dans chacun des n intervalles disjoints $]\,0\,;1\,[\,,]\,1\,;2\,[\,,\ldots,]\,n-1\,;n\,[$, il ne peut en admettre plus dans aucun de ces intervalles. On en déduit que

$$\boxed{\text{P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]\,k\,;k+1\,[$, pour $k=0,\ldots,n-1$.}}$$

> Comme souvent dans les sujets, la première question est assez facile, du moins classique. Il s'agit donc de la rédiger du mieux possible afin de laisser une bonne impression au correcteur dès le début de la copie. Ici, on s'attache à citer correctement les hypothèses du théorème de Rolle.

2 Soit $n \geqslant 1$. En développant le polynôme $\mathrm{P}_n(\mathrm{X})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n &= \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-n)\\ &= \mathrm{X}^{n+1} - \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)\mathrm{X}^n + \ldots\end{aligned}$$

soit
$$\mathrm{P}'_n(\mathrm{X}) = (n+1)\mathrm{X}^n - n\Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)\mathrm{X}^{n-1} + \ldots$$

en dérivant. En particulier, le coefficient de degré n de P'_n est $n+1$ et son coefficient de degré $n-1$ vaut

$$\begin{aligned}c_{n,n-1} &= -n\sum_{k=0}^{n} k\\ &= -n\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Comme la somme des racines d'un polynôme scindé à racines simples de degré n, comme l'est P'_n, est égale à l'opposé du rapport de son coefficient de degré n et de son coefficient de degré $n-1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = -\frac{-n\times n(n+1)/2}{n+1}$$

Et donc
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \frac{n^2}{2}}$$

Enfin, puisque pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, le réel $\alpha_{n,k}$ vérifie $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{n,k} - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} k \\
&= \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \frac{n}{2}}$$

> Les formules qui permettent d'exprimer les sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique sont à connaître absolument.

3 Soit $n \geqslant 1$. Calculons les polynômes $\mathrm{P}_n(n-\mathrm{X})$ puis $\mathrm{P}'_n(n-\mathrm{X})$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n(n-\mathrm{X}) &= (n-\mathrm{X})(n-\mathrm{X}-1)\ldots(n-\mathrm{X}-(n-1))(n-\mathrm{X}-n) \\
&= (n-\mathrm{X})((n-1)-\mathrm{X})\ldots(1-\mathrm{X})(-\mathrm{X}) \\
&= (-1)^{n+1}(\mathrm{X}-n)(\mathrm{X}-(n-1))\ldots(\mathrm{X}-1)\mathrm{X} \\
\mathrm{P}_n(n-\mathrm{X}) &= (-1)^{n+1}\mathrm{P}_n(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

et $$-\mathrm{P}'_n(n-\mathrm{X}) = (-1)^{n+1}\mathrm{P}'_n(\mathrm{X})$$

en dérivant. Fixons maintenant un entier k dans $[\![0\,;\, n-1]\!]$. Puisque le réel $x_{n,k}$ est une racine du polynôme P'_n, il vérifie

$$\mathrm{P}'_n(n - x_{n,k}) = (-1)^n \mathrm{P}'_n(x_{n,k}) = 0$$

si bien que le réel $n - x_{n,k}$ est également une racine du polynôme P'_n. Puisque $x_{n,k}$ appartient à l'intervalle $]\,k\,;k+1\,[$, c'est-à-dire vérifie l'encadrement

$$k < x_{n,k} < k+1$$

le réel $n - x_{n,k}$ vérifie, lui, l'encadrement

$$n-k-1 < n - x_{n,k} < n-k$$

et appartient donc à l'intervalle $]\,n-k-1\,;n-k\,[$. Enfin l'unicité du réel $x_{n,n-k-1}$ établie à la la question 1 permet d'affirmer que l'on a $n - x_{n,k} = x_{n,n-k-1}$, soit

$$\boxed{x_{n,k} + x_{n,n-k-1} = n}$$

4 Calculons

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-k-1} &= x_{n,k} - k + x_{n,n-k-1} - (n-k-1) \\
&= x_{n,k} + x_{n,n-k-1} - n + 1 \\
\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-k-1} &= n - n + 1
\end{aligned}$$

d'après la question précédente, soit

$$\boxed{\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-k-1} = 1}$$