Mines Physique 2 PC 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérémie Palacci (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur la modélisation des écoulements d'hydrocarbures au sein des roches poreuses. L'énoncé du problème forme un ensemble cohérent, progressif et de longueur raisonnable. Il comporte trois parties indépendantes :

- dans la première, on étudie classiquement l'écoulement de Poiseuille en géométrie cylindrique ;
- une deuxième partie, très simple, est consacrée à la définition et à la mesure de la porosité d'une roche ;
- la troisième partie est de loin la plus longue et la plus sélective : on y introduit la notion de perméabilité d'une roche poreuse afin de caractériser l'évolution temporelle d'un puits de forage.

Les concepts physiques mis en jeu dans ce problème sont relativement peu nombreux : les résultats ne se rapportent qu'à la cinématique et à la dynamique des écoulements visqueux. Malgré deux erreurs sans gravité et quelques questions plutôt elliptiques, l'énoncé est suffisamment directif. Il ne requiert pas de longs développements calculatoires et beaucoup de résultats intermédiaires sont donnés. Ce problème est donc d'une difficulté raisonnable.

Indications

Première partie

1 Développer div $(\rho\,\overrightarrow{v})$ selon le résultat du formulaire.

3 La pression P ne dépend que de z et la vitesse v ne dépend que de r.

7 Définir la notion de couche limite.

Deuxième partie

9 Prendre en compte les masses des nacelles et le volume de la nacelle de droite. Les forces exercées sur chacune des nacelles sont égales quand la balance est équilibrée. Dans la deuxième méthode, le premier temps est similaire au schéma de gauche de la question 10.

10 Le volume de solvant déplacé correspond au seul volume solide $\mathrm{V_S}$.

Troisième partie

11 Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{P}$ et $\eta\,\overrightarrow{\Delta v}$ ont la même dimension.

12 Dans la loi de Darcy, la variation de pression est $-\mathrm{dP}$.

13 La masse de fluide entre z et $z + \mathrm{d}z$ est $\rho\phi\mathrm{A}\mathrm{d}z$.

14 Effectuer un développement à l'ordre 1 de la masse volumique ρ par rapport à la variable P, à température constante.

15 Justifier que seules les dérivées particulaires peuvent relier rigoureusement les champs eulériens ρ et P selon l'équation d'état de la question 14. Utiliser l'équation de la question 13 à l'ordre le plus bas non nul et la relation de la question 12.

17 Considérer que div $\overrightarrow{v} = 0$ et utiliser le formulaire.

18 Partir de $\Delta\mathrm{P} = 0$ et utiliser le formulaire. Évaluer les constantes d'intégration à l'aide de la loi de Darcy et des pressions aux limites.

19 Supprimer le signe « $-$ » dans la définition de l'exponentielle intégrale afin d'obtenir une fonction effectivement négative comme sur les tracés. Calculer $\mathrm{dP}/\mathrm{d}r$ en considérant la fonction composée $\mathrm{Ei}\,[x(r,t)]$. L'unité de K est le $\mathrm{m^2.s^{-1}}$.

21 Déterminer à quelle condition sur r on a $|\mathrm{Ei}(x)| \leqslant 10^{-3}$ à l'instant t_R.

22 Justifier et vérifier que la vitesse de filtrage résultante est tangente à la faille. Utiliser ${r'}^2 = (\overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}})^2$, où O et O′ sont les centres des puits.

23 Considérer $\mathrm{P}(a,\theta,t)$ à l'ordre le plus bas non nul avec $a \ll d$ (ou $t_\mathrm{P} \ll t_\mathrm{i}$) puis simplifier l'une ou/et l'autre des exponentielles intégrales comme à la question 20.

24 Justifier qu'à la pression $\mathrm{P_G}$, le volume $\mathrm{V_G}$ recherché correspond aux pores du cylindre de rayon R. Utiliser la question 14 pour en déduire le volume $\mathrm{V_0}$ à la pression $\mathrm{P_0}$.

I. Étude d'un écoulement

1 L'équation [1] correspond au principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule fluide de volume unitaire. On y reconnaît :

- l'accélération locale $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$ de la particule dans un écoulement non stationnaire ;
- l'accélération convective $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ de la particule en mouvement dans un écoulement non uniforme ;
- la résultante volumique $-\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{P}$ des forces de pression ;
- la résultante volumique $\eta\,\overrightarrow{\Delta v}$ des forces de viscosité.

L'équation [2] de conservation de la matière (ou de la masse) s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\,\overrightarrow{v}) = 0$$

soit selon le formulaire $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\rho + \rho\,\text{div}\,\overrightarrow{v} = 0$$

Comme ρ est un scalaire, $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\rho = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\rho$ et l'équation précédente s'écrit

$$\frac{\text{D}\rho}{\text{D}t} + \rho\,\text{div}\,\overrightarrow{v} = 0$$

En écoulement incompressible, le premier terme étant nul, il reste

$$\boxed{\text{div}\,\overrightarrow{v} = 0}$$

2 La symétrie de révolution fait que le problème suppose a priori que $\overrightarrow{v}$ est indépendant de l'angle θ. Par ailleurs, comme le régime est stationnaire, les champs eulériens sont indépendants du temps. Enfin, en écoulement incompressible avec $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{u_z}$,

$$\text{div}\,\overrightarrow{v} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

donc $\overrightarrow{v}$ est indépendant de la cote z et ne dépend que du rayon r.

Pour montrer que la dérivée convective $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$ est nulle, il suffit de considérer qu'avec $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{u_z}$, on a

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = v\frac{\partial}{\partial z}$$

et qu'ainsi $$(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = v\frac{\partial}{\partial z}\left(v(r,t)\,\overrightarrow{u_z}\right) = \overrightarrow{0}$$

3 En régime stationnaire, $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$ est nulle et selon le formulaire, avec $\overrightarrow{v} = v(r)\,\overrightarrow{u_z}$,

$$\overrightarrow{\Delta v} = \Delta v\,\overrightarrow{u_z} = \frac{1}{r}\frac{\text{d}}{\text{d}r}\left(r\frac{\text{d}v}{\text{d}r}\right)\overrightarrow{u_z}$$

L'équation [1] donne alors, en projection selon $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$0 = -\frac{\partial \text{P}}{\partial r} \qquad \text{et} \qquad 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial \text{P}}{\partial \theta}$$

Ainsi, P ne dépend que de z et la projection de l'équation [1] selon $\overrightarrow{u_z}$ conduit à

$$0 = -\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} + \frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} = \frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)}$$

Dans cette égalité, les termes de gauche et de droite ne dépendent que de la cote z et du rayon r respectivement. Comme ces deux variables sont indépendantes, les deux termes de l'égalité sont nécessairement égaux à une même constante.

4 Partons de l'égalité précédente, sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right) r$$

et intégrons-la par rapport à r en

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right) r^2 + \mathrm{A} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right) r + \frac{\mathrm{A}}{r}$$

puis une nouvelle fois en

$$v(r) = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right) r^2 + \mathrm{A}\ln r + \mathrm{B}$$

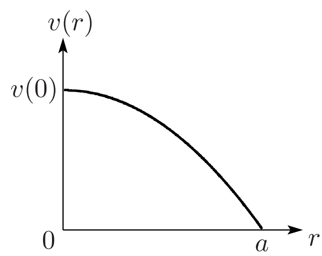
où A et B sont deux constantes d'intégration. Physiquement, $v(r)$ ne peut diverger en $r = 0$: la constante A est donc nécessairement nulle. Par ailleurs, la condition d'adhérence du fluide en $r = a$ sur la paroi fixe du tuyau impose

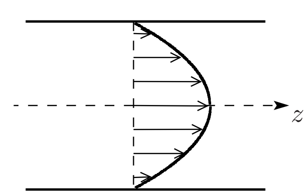
$$v(a) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{B} = -\frac{1}{4\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right) a^2$$

Finalement,

$$\boxed{v(r) = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right)(r^2 - a^2)}$$

Comme $\dfrac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} < 0$ et $r \leqslant a$, la vitesse $v(r)$ est positive et a un profil parabolique.





5 Le débit volumique qui s'écoule au travers de la surface $(\mathcal{S})$ de la conduite est

$$\mathrm{Q_P} = \iint_{(\mathcal{S})} \overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \int_r\int_\theta v(r)\times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

en coordonnées cylindriques. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Q_P} &= \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right)\times\int_{r=0}^{a}(r^2 - a^2)r\,\mathrm{d}r\times\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right)\times\left(-\frac{a^4}{4}\right)\times 2\pi\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\mathrm{Q_P} = -\,\mathrm{K}\left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}\right) \qquad \text{où} \qquad \mathrm{K} = \frac{\pi a^4}{8\eta}}$$