CCP Physique 1 PC 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Iglésias (ENS Ulm) ; il a été relu par Olivier Frantz (Professeur agrégé) et Benoît Lobry (Professeur en CPGE).

Le sujet comporte deux problèmes complètement indépendants.

Le premier problème s'intéresse à une idée de science-fiction, l'ascenseur spatial. Il s'agit d'utiliser un câble résistant entre l'équateur terrestre et une orbite cible, et de se servir de ce câble pour lever des charges. L'étude se décompose en cinq parties :

- La première partie est la plus simple. Elle met en jeu les connaissances de base de la mécanique céleste sur les planètes et les satellites.
- La deuxième partie est très calculatoire. Son but est de déterminer un critère de stabilité de l'ascenseur spatial. Elle utilise la mécanique dans les référentiels non galiléens.
- Ensuite, l'étude est orientée vers la résistance de l'ascenseur aux contraintes et aux forces internes. La difficulté est raisonnable et l'accent est mis sur les applications numériques. Les conclusions qui en découlent sont très intéressantes.
- Pour entrer dans le détail, le sujet propose dans la quatrième partie d'étudier la stabilité du dispositif vis-à-vis de différentes perturbations extérieures : séismes et vent. Les études sont menées en grande partie en ordre de grandeur et les rares calculs sont plutôt faciles.
- Le problème s'achève sur des questions d'induction. Le principe de cette cinquième partie est d'utiliser les phénomènes inductifs pour aider à la stabilisation de l'ascenseur par rapport aux diverses perturbations vues dans la partie précédente.

Le second problème, très calculatoire, aborde la photographie du point de vue de l'optique ondulatoire. Il est divisé en quatre parties de difficultés inégales :

- Le problème débute par une étude de l'énergie lumineuse, en travaillant en particulier sur la dualité onde-corpuscule de la lumière.
- La deuxième partie peut être déconcertante puisqu'elle traite de cinétique chimique. Elle ne comporte pas de difficultés physiques ou mathématiques.
- Ensuite, on est amené à étudier en détail un dispositif optique d'interférences à deux ondes. La deuxième partie est alors exploitée pour expliquer comment afficher une figure d'interférences sur un écran.
- La dernière partie, calculatoire, demande de bien comprendre le principe de diffraction de Huygens-Fresnel.

Le sujet est donc très complet car de nombreuses parties du programme sont abordées (mécanique du solide et des fluides, induction, optique). Il est de difficulté moyenne, mais requiert une très bonne compréhension des phénomènes mis en jeu pour pouvoir être traité efficacement dans le temps imparti, sous peine de se perdre dans des calculs inutiles.

Indications

L'ascenseur spatial

I.1.4 Réduire les forces s'exerçant sur le câble aux seules forces de gravitation et d'inertie centrifuge dans le référentiel $\mathcal{R}_t^*$.

I.2.3 Penser à isoler un tronçon de câble de longueur infinitésimale, puis à lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

I.2.4 Pour calculer la constante d'intégration, penser à isoler la masse $\mathrm{M_{top}}$ et à lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.

I.2.5 La question est un peu libre : il s'agit de trouver un critère et non **le** critère. Choisir par exemple de prendre la masse $\mathrm{M_{top}}$ nulle.

I.3.4 Là encore, il faut montrer un esprit d'initiative pour l'application numérique. Choisir des valeurs numériques pertinentes pour les constantes. On peut penser à prendre $\mathrm{M_{top}} = 0$.

I.4.1 Faire attention au fait qu'il existe deux définitions de la vitesse pour une onde. Montrer que ces définitions donnent la même vitesse et conclure.

I.4.2 Résoudre l'équation différentielle.

I.4.3 Penser au phénomène de résonance en électricité.

I.4.4 Justifier que seules les forces du vent et de tension du câble jouent un rôle dans la déviation du câble. Déterminer alors cette inclinaison à partir de ces deux forces.

Optique physique et photographie

II.1.4 Se souvenir que la puissance électromagnétique traversant une surface est le flux du vecteur de Poynting au travers de cette surface.

II.1.5 Penser à la dualité onde corpuscule. Introduire la densité volumique de photons, et calculer de deux façons différentes la puissance surfacique transportée par l'onde.

II.3.1 Les fentes d'Young...

II.4.1 Faire appel à la fonction sinus cardinal qui ne prend de valeur non nulle qu'au voisinage de 0.

I. L'ascenseur spatial

I.1.1 Le champ de gravité $\overrightarrow{g_0}$ de la Terre a la symétrie de sa source : la symétrie sphérique. Il est radial et ne dépend que de la distance radiale r. L'application du théorème de Gauss à la surface de la Terre (supposée sphérique) donne

$$\begin{aligned} 4\,\pi\,{\rm R_T}^2\,g_0({\rm R_T}) &= \oiint \overrightarrow{g_0}\cdot \overrightarrow{\rm dS} \\ &= \iiint {\rm div}\,\overrightarrow{g_0}\ {\rm dV} \\ 4\,\pi\,{\rm R_T}^2\,g_0({\rm R_T}) &= -\,4\,\pi\,\mathcal{G}\,{\rm M_T} \end{aligned}$$

d'où la valeur du champ de gravitation $\mathrm{G_0}$:

$$\boxed{\mathrm{G_0} = \|\overrightarrow{g_0}(\mathrm{R_T})\| = \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_T}}{\mathrm{R_T}^2} = 9,80\ \mathrm{m.s^{-2}}}$$

Il y a une différence entre g et $\mathrm{G_0}$ car g est la valeur du champ de pesanteur et non de gravitation : il faut ajouter la force centrifuge. Le champ de gravitation à l'équateur $\mathrm{G_0}$ est alors réduit d'un terme :

$$\Omega^2\,\mathrm{R_T} = 0,03\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Le champ g vaut donc environ $9,77\ \mathrm{m.s^{-1}}$, ce qui est compatible avec la valeur donnée par l'énoncé.

> Le calcul de $\mathrm{G_0}$ est en fait plus compliqué : il faut tenir compte de la non-sphéricité de la Terre.

I.1.2 La relation entre le rayon r d'une orbite circulaire d'un satellite et sa période de révolution τ est la troisième loi de Kepler :

$$\frac{\tau^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{\mathcal{G}\,\mathrm{M_T}}$$

En utilisant le résultat de la question I.1.1, on obtient la relation

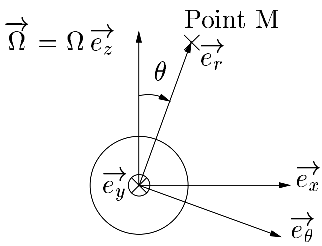
$$\boxed{\frac{\tau^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{\mathrm{G_0}\,\mathrm{R_T}^2} = 9,89.10^{-14}\ \mathrm{s^2.m^{-3}}}$$

I.1.3 Appliquons la formule de la question I.1.2, en supposant que la Lune est un objet ponctuel suivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 384\,000$ km :

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{4\,\pi^2}{\mathrm{G_0}\,\mathrm{R_T}^2}\,r^3} = 2,37.10^6\ \mathrm{s} \qquad \text{soit} \qquad 27,4\ \text{jours}}$$

Ce résultat est en accord avec la valeur traditionnelle de 28 jours.

I.1.4 Considérons le système $\mathcal{S}$ constitué du satellite de masse M, dans le référentiel $\mathcal{R}_\mathrm{T}$ de la Terre. Ce référentiel n'est pas galiléen, car la Terre est en rotation par rapport aux étoiles lointaines. Le satellite subit donc des forces d'inertie s'ajoutant à l'attraction gravitationnelle. Ces forces peuvent lutter contre l'attraction de la Terre (comme la force centrifuge) et stabiliser un satellite, l'immobilisant dans $\mathcal{R}_\mathrm{T}$.



Supposons que la rotation de la Terre soit de vecteur instantané de rotation constant, c'est-à-dire de direction fixe et de période constante. La force d'inertie d'entraînement agissant sur le satellite de masse M est alors réduite à la force centrifuge :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{F}_{\text{inertie}}} &= -\,\mathrm{M}\,\overrightarrow{\Omega}\wedge(\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{r}\,)\\ &= \mathrm{M}\,\Omega^2\,r\,\sin\theta\,\overrightarrow{e_x}\end{aligned}$$

Supposons aussi que nous recherchions la distance $\mathrm{R_{GS}}$, si elle existe, d'un satellite immobile dans $\mathcal{R}_\mathrm{T}$. La force d'inertie de Coriolis est donc nulle :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}_{\text{Coriolis}}} = -2\,\mathrm{M}\,\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Le satellite est soumis uniquement à son poids, via l'attraction gravitationnelle, et à la force centrifuge. D'après le principe fondamental de la dynamique, le satellite est à l'équilibre dans $\mathcal{R}_\mathrm{T}$ si la somme de ces deux forces est nulle, ce qui donne la colatitude du satellite, $\theta = \pi/2$, et sa distance au centre de la Terre :

$$\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_T}\,\mathrm{M}}{\mathrm{R_{GS}}^2} = \mathrm{M}\,\Omega^2\,\mathrm{R_{GS}}$$

soit

$$\boxed{\mathrm{R_{GS}} = \left(\frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_T}}{\Omega^2}\right)^{1/3} = 42\,200\ \text{km}}$$

Cette orbite particulière s'appelle l'orbite géostationnaire. Le satellite est toujours à la verticale du même point de la surface de la Terre (situé sur l'Équateur). L'altitude de cette orbite est $h = \mathrm{R_{GS}} - \mathrm{R_T} = 35\,800$ km, valeur compatible avec la valeur usuelle de 36 000 km.

Une autre méthode consiste à utiliser les principes énergétiques. Dans le référentiel $\mathcal{R}_\mathrm{T}$, l'énergie totale du satellite est conservée. Et la position d'équilibre du satellite est celle qui minimise son énergie totale E par rapport aux variables r et θ (analogue des principes thermodynamiques).

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(r,\theta) &= \mathrm{E}_{\text{cinétique}} + \mathrm{E}_{\text{potentielle}} + \mathrm{E}_{\text{centrifuge}}\\ &= 0 - \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_T}\,\mathrm{M}}{r} - \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,\Omega^2\,(r\,\sin\theta)^2\end{aligned}$$

La minimisation par rapport à θ et r donne

$$0 = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial\theta} = -\,\mathrm{M}\,\Omega^2\,r^2\,\sin\theta\,\cos\theta$$

$$0 = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial r} = \frac{\mathcal{G}\,\mathrm{M_T}\,\mathrm{M}}{r^2} - \mathrm{M}\,\Omega^2\,r\,(\sin\theta)^2$$

dont les solutions stables sont justement la colatitude θ et la distance $r = \mathrm{R_{GS}}$ trouvées précédemment.

Nous indiquons enfin une dernière méthode, de loin la plus astucieuse. Il s'agit de considérer le satellite évoluant dans un référentiel galiléen. Si l'on néglige le mouvement de la Terre, alors ce satellite subit uniquement une force centrale : la gravitation. On connaît sa période de révolution (T = 1 jour), donc d'après la troisième loi de Kepler

$$\mathrm{R_{GS}} = \left(\frac{\mathrm{T}^2\,\mathcal{G}\,\mathrm{M_T}}{4\,\pi^2}\right)^{1/3}$$