Centrale Maths 2 PC 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Nesme (ENS Lyon) ; il a été relu par Thomas Chomette (Professeur en CPGE) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est consacrée à l'étude d'un ensemble de symétries en dimension 2, 3 et n. Elle consiste à déterminer les propriétés de ces symétries et de leurs composées dans une série de cas particuliers, ainsi qu'à dégager quelques règles générales. Le sujet est très long pour le temps imparti mais dans l'ensemble tout à fait classique et raisonnablement calculatoire. La vigilance est tout de même de mise dans les calculs un peu répétitifs où il serait dommage d'introduire des erreurs, mais il n'y a pas de grosse « astuce ».

L'épreuve est divisée en trois parties qui approchent la question sous trois angles différents, sans être entièrement indépendantes.

- La première partie est consacrée à l'étude du cas de la dimension 2. On y utilise la géométrie euclidienne sous une forme intéressante, avec un produit scalaire différent du produit scalaire usuel.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude de quelques propriétés des endomorphismes définis dans le cas général, et fait appel à des résultats établis dans la première partie. On détermine à quelles conditions sur les paramètres on peut trouver une base telle que les matrices dans cette base de tous les endomorphismes étudiés aient tous leurs coefficients entiers. Cette partie est la plus longue et la plus difficile de l'épreuve. En particulier, la question II.C.2.c est sans doute la plus dure et pourtant il est difficile de donner plus d'indications que l'énoncé car les obstacles y sont essentiellement calculatoires.
- La troisième partie propose l'analyse approfondie d'un cas particulier en dimension 3, en utilisant d'abord des résultats de la deuxième partie ; on étudie ensuite de manière plus détaillée trois réflexions ainsi que leur composée, en les décrivant complètement. Les calculs peuvent être un peu pénibles (particulièrement pour les questions III.D et III.E.2), mais la difficulté principale reste, comme dans la partie I, la manipulation de concepts de géométrie euclidienne dans un espace muni d'un produit scalaire « exotique ».

Ce sujet présente une difficulté assez formatrice : la nécessité de raisonner de manière abstraite sur la géométrie euclidienne. Par exemple, les notions de rotation, de symétrie orthogonale et d'angle sont ici définies à partir d'un produit scalaire inhabituel. Un excellent moyen de s'éclaircir les idées sur ces notions.

Indications

Partie I

I.B.2 Raisonner par l'absurde.

I.B.3 Utiliser la question I.B.1.

I.C.2 Il faut comprendre « orthonormale pour ϕ ».

I.C.5 L'angle non orienté entre deux vecteurs se mesure grâce au produit scalaire. Par définition, une base est directe quand son déterminant dans la base de référence est positif; le déterminant est donc l'outil principal pour déterminer une orientation.

I.D.1 Écrire explicitement les matrices associées à σ_1 et σ_2 relativement à la base $(e_1, \mu e_2)$, en considérant μ comme un paramètre.

I.D.2 Commencer par tracer les vecteurs e_1 et f_2, le reste découle facilement de la question précédente.

Partie II

II.A.1.c Remarquer que les σ_i sont des symétries.

II.A.3.b Utiliser la question II.A.2.a pour donner une expression de $\tau(e_k)$, puis découper $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{jk}\varepsilon_k$ en trois parties.

II.A.4.a Utiliser la question II.A.2.a pour exprimer chaque e_k dans la base $\mathscr{F}$.

II.A.4.b Trouver la matrice de passage de la base $\mathscr{F}$ à la base $(\tau(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$.

II.A.4.c Remarquer que $\det(\mathrm{I}+\mathrm{C}) = 1$ et multiplier $\mathrm{I}+\mathrm{C}$ par $\lambda\mathrm{I}-\mathrm{T}$.

II.B.1.d Les σ_i sont des symétries.

II.B.2.a Revoir les questions I.A.2 et I.B.4.

II.B.2.b Revoir les questions I.A.2 et I.C.6.

II.C.1 Comme à la question I.D.1, exprimer σ_i dans la base $(\nu_1 e_1, \nu_2 e_2, \ldots, \nu_n e_n)$, en considérant les $\nu_1, \ldots, \nu_n$ comme des paramètres, puis traduire le fait que tous les coefficients matriciels sont entiers.

II.C.2.b Utiliser la question II.A.4.c.

II.C.2.c Développer $\det(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{T})$ par rapport à une ligne ou une colonne en n'étudiant que les termes en λ^{n-1}.

II.C.3.b Utiliser la question II.C.2.

Partie III

III.A Utiliser la question II.C.3.c.

III.D Pour trouver les angles des rotations, on peut considérer l'image par la rotation d'un vecteur orthogonal à l'axe de rotation.

III.E.3 Déterminer la matrice de τ dans la base $\mathscr{D}$.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

I.A.1 D'après les définitions de l'énoncé, on a

$$\boxed{\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\left(\dfrac{\pi}{a}\right) \\ -\cos\left(\dfrac{\pi}{a}\right) & 1 \end{pmatrix}}$$

I.A.2 $\sigma_1(e_1) = -e_1$, donc la première colonne de S_1 est $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_1(e_2) = e_2 - 2me_1$, donc la seconde colonne de S_1 est $\begin{pmatrix} -2m \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule S_2 de la même manière, ce qui donne

$$\boxed{\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2m & -1 \end{pmatrix}}$$

On en déduit
$$\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 4m^2 - 1 & 2m \\ -2m & -1 \end{pmatrix}}$$

I.B.1 On calcule le polynôme caractéristique de T.

$$\begin{aligned} \mathrm{P_T(X)} &= \begin{vmatrix} 3 - \mathrm{X} & 2m \\ -2m & -1 - \mathrm{X} \end{vmatrix} \\ &= (\mathrm{X} - 3)(\mathrm{X} + 1) + 4m^2 \\ &= \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 3 + 4 \qquad \text{car } |m| = 1 \\ \mathrm{P_T(X)} &= (\mathrm{X} - 1)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de T est donc 1.}}$$

Le vecteur $xe_1 + ye_2$ est un vecteur propre de T si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + 2my = 0 \\ -2mx - 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $y = -mx$.

$$\boxed{\text{Les vecteurs propres de T sont donc les vecteurs de la forme } \begin{pmatrix} -x \\ mx \end{pmatrix}, \text{ où } x \neq 0.}$$

> Ne pas oublier qu'en toute rigueur, 0 n'est pas un vecteur propre.

I.B.2 Comme T admet 1 pour seule valeur propre, si T était diagonalisable elle vaudrait I ; or ce n'est pas le cas, donc

$$\boxed{\text{T n'est pas diagonalisable.}}$$

I.B.3 Puisqu'on ne peut pas diagonaliser T, trigonalisons-la. Pour cela, on choisit un vecteur propre, disons $e_1 - me_2$, et un autre vecteur linéairement indépendant du premier, disons e_2. Ces vecteurs, à eux deux, forment une base de E et la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à cette nouvelle base est

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'inverse } \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

Le choix de P est tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}$ est triangulaire. En effet, on vérifie aisément :

$$\boxed{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP} = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

> Rappelons que si B et B′ sont deux bases de E, $\mathrm{P}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$ la matrice de passage de B à B′, u un endomorphisme de E et M et N les matrices de u respectivement dans les bases B et B′, alors on a $\mathrm{N} = (\mathrm{P}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'})^{-1}\mathrm{MP}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}$. La matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}$ calculée dans cette question est donc la matrice de τ dans la base formée par $e_1 - me_2$ et e_2, matrice qui est triangulaire puisque $e_1 - me_2$ est un vecteur propre de τ.

I.B.4 D'après la question précédente,

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{T}^k\mathrm{P} = \left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{TP}\right)^k = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 2km \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{T}^k = \mathrm{I}$ équivaut à $\begin{pmatrix} 1 & 2km \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{IP} = \mathrm{I}$, c'est-à-dire à $2km = 0$, ce qui ne se produit pas pour $k > 0$.

$$\boxed{\tau \text{ est donc d'ordre infini.}}$$

I.C.1 Comme mentionné dans l'énoncé, ϕ est bilinéaire. Elle est aussi clairement symétrique. Il reste à montrer qu'elle est définie positive. On a

$$\begin{aligned} \phi(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) &= x^2 + y^2 + 2mxy \\ &= (x + my)^2 + (1 - m^2)y^2 \end{aligned}$$

Cette quantité est positive car $m^2 \leqslant 1$; de plus, comme $m^2 < 1$, elle ne s'annule que si $x + my = 0$ et $y = 0$, ce qui implique $x = y = 0$. On a ainsi montré que ϕ était définie positive, on en conclut que

$$\boxed{\phi \text{ est un produit scalaire.}}$$

I.C.2 On voit immédiatement que $\mathscr{B}$ est toujours normée. Supposons qu'elle soit de plus orthogonale, c'est-à-dire $\phi(e_1, e_2) = m = 0$, ce qui signifie $-\cos(\pi/a) = 0$. On en déduit que π/a est congru à $\pi/2$ modulo π. Comme $a \geqslant 2$, on a $0 < \pi/a \leqslant \pi/2$; d'où $\pi/a = \pi/2$. Réciproquement, si $a = 2$ alors ϕ est le produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique est bien orthonormée.

$$\boxed{\text{La base } \mathscr{B} \text{ est donc orthonormale si et seulement si } a = 2.}$$