Centrale Maths 1 MP 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Vidick (ENS Ulm) ; il a été relu par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) et Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE).

Le problème est consacré à l'étude de certains sous-ensembles de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, ainsi qu'à une généralisation du processus de construction des séries de Fourier à des fonctions non nécessairement périodiques. Il est composé de trois parties.

- Dans la première partie, on étudie d'abord deux formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathscr{B}$ des fonctions continues par morceaux et bornées sur $\mathbb{R}$. Ces formes linéaires servent à définir les espaces $\mathscr{M}_1$ des fonctions *moyennables* et $\mathscr{M}_2$ des fonctions de *carré moyennable* dont on étudie certaines propriétés ; on montre en particulier que $\mathscr{M}_1$ est un espace vectoriel mais pas $\mathscr{M}_2$. On introduit ensuite un pseudo-produit scalaire sur $\mathscr{M}_2$ et on montre finalement que $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ sont fermés dans $(\mathscr{B}, \|\cdot\|_\infty)$.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'espace vectoriel $\mathscr{Q}$ des limites uniformes de polynômes trigonométriques. On montre en particulier que, sous certaines conditions, $\mathscr{Q}$ est stable par produit, composition et passage à la limite uniforme. On définit ensuite les *coefficients de Fourier-Bohr* de $x \in \mathscr{Q}$ à l'aide du produit scalaire défini dans la première partie, et on prouve une formule de Parseval.
- Dans la dernière partie, on étudie la *fonction de corrélation* de $x \in \mathscr{B}$ et on montre en particulier certaines propriétés sur ses coefficients de Fourier-Bohr. On termine par l'étude d'une fonction 1-périodique et le calcul de ses coefficients de Fourier, donnant lieu à l'évaluation de la somme d'une série alternée.

Les notions du programme abordées concernent essentiellement les chapitres sur l'intégration et les séries de Fourier. Ses principales difficultés sont sa longueur et l'exotisme des espaces et objets étudiés, peu familiers aux élèves des classes préparatoires, comme les coefficients de Fourier-Bohr. Des difficultés peuvent également être rencontrées lors de l'utilisation de théorèmes d'approximation et pour l'étude de la convergence de certaines suites de fonctions. Les questions font souvent appel, de manière indirecte, à des résultats démontrés dans d'autres questions, et il est parfois difficile de bien saisir toute l'utilité des résultats algébriques que l'on démontre dans les premières questions de chaque partie. Nous vous conseillons, à chaque question, de replacer mentalement le résultat démontré dans la perspective de l'énoncé, surtout si la preuve se faisait de manière presque automatique (par exemple certaines preuves de structure), de manière à penser à l'utiliser le moment venu.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I.

I.A.2 Majorer $|\mathrm{M_T}(x) - \mathrm{M_T}(y)|$ en utilisant l'inégalité de la moyenne.

I.B Utiliser la relation de Chasles pour faire apparaître l'intégrale sur une période et majorer les autres termes.

I.C.1 Découper $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ en intervalles de longeur P plus un reste, et faire tendre T vers l'infini.

I.C.3 Utiliser le théorème de convergence dominée.

I.C.4 Montrer que $\mathrm{M_T}(x_0) \underset{\mathrm{T}\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\ln(1+\mathrm{T})}/(1+\mathrm{i})$.

I.D.1 Utiliser la question I.C.3.

I.D.2 Factoriser $x^2 - y^2$ selon l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

I.D.3 Considérer la fonction $x_0 + \mathrm{U}$.

I.F Utiliser la question I.C.1.

I.G Montrer que $\mathscr{P} \subset \mathscr{M}_2$ puis utiliser la question I.E.1.

I.H.1 La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

I.I.1 La suite $(\|x_n - x\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée.

I.I.2 Utiliser la question I.D.2.

Partie II.

II.A.1 Utiliser les questions I.H et I.I pour montrer que $\mathscr{Q}$ est inclus dans $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$.

II.A.2 Utiliser la question I.E.1.

II.A.3 Si P est un polynôme trigonométrique, alors P_τ est aussi un polynôme trigonométrique.

II.A.6 Utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass.

II.B Considérer $|c(\omega) - \langle \mathrm{P}_n, e_\omega\rangle|$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II.D.1 Montrer $\langle x, \mathrm{S_N}\rangle = \mathrm{M}\,|\mathrm{S_N}|^2$ en utilisant les polynômes P_n.

Partie III.

III.A Choisir $\tau = 0$.

III.B Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question I.B.

III.D.1 Utiliser la question II.A.2

III.D.3 Écrire $|\langle x, x_\tau\rangle - \langle \mathrm{S}_n, (\mathrm{S}_n)_\tau\rangle| = |\langle x - \mathrm{S}_n, x_\tau\rangle + \langle \mathrm{S}_n,\ x_\tau - (\mathrm{S}_n)_\tau\rangle|$ et majorer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

III.E.2 Montrer que $\gamma_x(\tau) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\ \overline{x}(t-\tau)\,\mathrm{d}t$.

III.F.2 Découper l'intégrale entre 0 et τ, puis entre τ et 1, pour pouvoir explicitement évaluer $\mathrm{F}(t-\tau)$.

III.F.3 Utiliser la convergence simple de la série de Fourier de γ_{x_1} en $t = 1/2$.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Partie I.

I.A.1 Soit T un réel fixé. $\mathrm{M_T}$ est une application bien définie de l'espace vectoriel $\mathscr{B}$ dans $\mathbb{C}$. Pour conclure que c'est une forme linéaire, il reste à vérifier la linéarité, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathscr{B}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M_T}(\lambda x + \mu y) &= \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \lambda x(t) + \mu y(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \lambda x(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \mu y(t)\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{M_T}(\lambda x + \mu y) &= \lambda \mathrm{M_T}(x) + \mu \mathrm{M_T}(y)
\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale.

$$\boxed{\mathrm{M_T} \text{ est donc une forme linéaire de } \mathscr{B} \text{ dans } \mathbb{C}.}$$

Montrons que $\mathscr{M}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$. Il est non vide (il contient la fonction nulle). Soient $x, y \in \mathscr{M}_1$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors, par linéarité du passage à la limite, la limite de

$$\mathrm{M_T}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{M_T}(x) + \mu \mathrm{M_T}(y)$$

lorsque T tend vers l'infini est finie et vaut $\lambda \mathrm{M}(x) + \mu \mathrm{M}(y)$. Donc $\lambda x + \mu y \in \mathscr{M}_1$, et $\mathscr{M}_1$ est stable par combinaisons linéaires. On a également montré que M était linéaire ; comme elle est bien définie de $\mathscr{M}_1$ dans $\mathbb{C}$ c'est une forme linéaire.

$$\boxed{\mathscr{M}_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{B} \text{ et M est une forme linéaire sur } \mathscr{M}_1.}$$

I.A.2 Soient T un réel fixé et $x, y \in \mathscr{B}$.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{M_T}(x) - \mathrm{M_T}(y)| &= \left|\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} x(t) - y(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} |x(t) - y(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{T}}\|x-y\|_\infty \int_0^{\mathrm{T}} 1\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\boxed{|\mathrm{M_T}(x) - \mathrm{M_T}(y)| \leqslant \|x-y\|_\infty}$$

$\mathrm{M_T}$ est donc lipschitzienne de rapport 1 de $\mathscr{B}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme canonique.

Fixons $x, y \in \mathscr{M}_1$. Alors, en passant à la limite lorsque T tend vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\boxed{|\mathrm{M}(x) - \mathrm{M}(y)| \leqslant \|x-y\|_\infty}$$

M est donc lipschitzienne de rapport 1 de $\mathscr{M}_1$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme canonique.

I.B Soient $x \in \mathscr{M}_1$ et $\tau \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Effectuons le changement de variable $u = t - \tau$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{M_T}(x_\tau)$:

$$\mathrm{M_T}(x_\tau) = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} x(t-\tau)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\tau}^{\mathrm{T}-\tau} x(u)\,\mathrm{d}u$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Découpons cette intégrale à l'aide de Chasles pour faire apparaître $\mathrm{M_T}(x)$:

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\tau}^{\mathrm{T}-\tau} x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\tau}^{0} x(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{0}^{\mathrm{T}} x(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}-\tau} x(u)\,\mathrm{d}u$$

> L'astuce consiste à faire apparaître la quantité souhaitée grâce à la relation de Chasles. Il ne faut pas hésiter à l'utiliser même lorsque, comme ici, les points en lesquels on coupe l'intégrale (0 et T) ne sont pas entre les bornes d'intégration ($-\tau$ et $\mathrm{T}-\tau$). On effectuera la même manipulation dans la question suivante.

L'inégalité de la moyenne permet de majorer la première et la dernière de ces intégrales en valeur absolue :

$$\left|\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-\tau}^{0} x(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{|\tau|}{\mathrm{T}}\|x\|_\infty$$

et de même,

$$\left|\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}-\tau} x(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{|\tau|}{\mathrm{T}}\|x\|_\infty$$

Ainsi ces deux intégrales tendent vers 0 lorsque T tend vers l'infini, à τ fixé. x_τ est donc moyennable, et en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on a montré :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{M}_1 \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{M}x = \mathrm{M}x_\tau}$$

I.C.1 Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^{a+\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{0} x(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{P}}^{a+\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, en effectuant le changement de variable $u = t - \mathrm{P}$ dans la troisième intégrale, on obtient :

$$\int_{\mathrm{P}}^{a+\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a} x(t-\mathrm{P})\,\mathrm{d}t = \int_0^{a} x(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^{0} x(t)\,\mathrm{d}t$$

car x est P-périodique. D'où

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \qquad \int_a^{a+\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t}$$

Soit maintenant T un réel plus grand que P, notons $n_\mathrm{T} = \lfloor \mathrm{T}/\mathrm{P} \rfloor$. L'idée est de découper l'intervalle $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ en n_T intervalles de longueur P sur lesquels l'intégrale sera la même, plus un reste qui sera négligeable en moyenne lorsque T sera très grand devant P. Appliquons la relation de Chasles pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{T}} x(t)\,\mathrm{d}t &= \left(\sum_{k=0}^{n_\mathrm{T}-1}\int_{k\mathrm{P}}^{(k+1)\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{n_\mathrm{T}\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} x(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n_\mathrm{T}-1}\int_0^{\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{n_\mathrm{T}\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} x(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} x(t)\,\mathrm{d}t = n_\mathrm{T}\int_0^{\mathrm{P}} x(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n_\mathrm{T}\mathrm{P}}^{\mathrm{T}} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .