Centrale Informatique MP 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Samuel Mimram (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-Baptiste Rouquier (ENS Lyon) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Le sujet est composé de deux problèmes distincts. Il est relativement long et comporte quelques questions difficiles, en particulier les dernières de chaque partie. Peu de connaissances sont requises : seules quelques propriétés classiques sur les espaces affines, les arbres et la représentation binaire d'entiers sont nécessaires.

Le premier problème amène à trouver un algorithme permettant de déterminer si un point est à l'intérieur ou à l'extérieur d'un polygone simple ; cet algorithme est linéaire en le nombre de points du polygone. L'énoncé ne demande pas de démonstrations formelles de la plupart des propriétés géométriques mais seulement des justifications à l'aide de figures ; il fait donc surtout appel à des « intuitions géométriques ». Des questions de programmation introduisent progressivement les fonctions qui seront nécessaires à l'implémentation de l'algorithme. Les fonctions des deux dernières questions sont longues à rédiger.

Le second problème propose de mener une étude de la *complexité de communication*. Deux personnes doivent coopérer pour calculer une fonction dont chacun connaît une partie de l'entrée. Dans la première partie du sujet, on suppose que seul un acteur peut communiquer de l'information à l'autre et on cherche à trouver la quantité minimale d'information qui doit être transmise pour que les deux puissent calculer la fonction. Ensuite, le modèle est élargi au cas où les deux acteurs peuvent s'échanger de l'information et on compare la quantité minimale d'information qui doit être transmise avec celle du premier modèle. Ce problème fait manipuler le codage des entiers en binaire et les formules classiques permettant de déterminer le nombre de chiffres d'un tel codage, ainsi que les arbres binaires. Il demande un peu d'intuition.

Indications

I.A.2 Effectuer un changement de base orthonormale dans une base dont l'un des vecteurs est colinéaire à $\overrightarrow{ab}$ et exprimer le déterminant dans cette base.

I.A.4 Les triangles (a, b, p) et (a, b, q) sont-ils directs, indirects ou aplatis ?

I.A.5 Distinguer deux cas suivant la valeur du produit scalaire $\langle \overrightarrow{ap} \,|\, \overrightarrow{ab} \rangle$ lorsque les vecteurs $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{ab}$ sont colinéaires en exprimant $\overrightarrow{ap}$ en fonction de $\overrightarrow{ab}$.

I.B.1 « Enlever » les points p_i du polygone tels que `direct` p_{i-1} p_i p_{i+1} renvoie 0.

I.B.2 Renvoyer un point s dont l'abscisse est plus grande que celle de tous les sommets de P.

I.B.3 Distinguer suivant la parité du nombre d'intersections de $[q, s]$ et P.

I.B.4 Utiliser la fonction `intersecte` pour trouver le nombre d'intersections de P avec $[q, s]$ (où s est un point à l'extérieur de P obtenu grâce à `en_dehors`) et appliquer le résultat de la question précédente.

I.B.5 Choisir s à l'extérieur de P dont l'ordonnée est égale à l'ordonnée de q augmentée de 1.

I.B.6 Regarder si p_{i-1} et p_{i+1} sont du même côté de $[a, b]$.

I.B.7 Regarder si p_{i-1} et p_{i+2} sont du même côté de $[a, b]$.

I.B.8 Utiliser les résultats des deux questions précédentes pour traiter les cas où l'intersection est un sommet de P. Il pourra être utile de convertir P en un vecteur de points et d'utiliser un modulo pour accéder à ces points.

II.A.1.a Il n'y a pas besoin d'échanger d'information.

II.A.1.b Proposer un protocole tel que $g_0(x)$ envoie le codage binaire de i si x est le i-ème élément de X.

II.A.1.c Envoyer le codage binaire de $x \bmod p$.

II.A.1.d Proposer un protocole tel que $g_0(x)$ envoie le codage binaire de $\mathrm{Sup}\,(x)$.

II.A.1.e Raisonner par l'absurde et montrer que l'image de f serait plus petite qu'elle ne l'est si l'inégalité n'était pas vérifiée.

II.A.1.f Utiliser la question précédente pour $y = \varnothing$.

II.A.2.a Transmettre l'indice de la ligne de la matrice correspondant à x.

II.A.2.b Raisonner de même qu'à la question II.A.1.e.

II.B.1.a Commencer par écrire M_f pour deviner f.

II.B.1.b Alice doit envoyer à Bob le codage binaire de y.

II.B.2.a Proposer un protocole aller-retour, fondé sur celui à sens unique, dont le coût est majoré par $\mathrm{D}^1(f) + \lceil \log_2 |\,\mathrm{Im}\,(f)| \rceil$.

II.B.2.b Raisonner de même qu'à la question II.A.1.e. Choisir f_0 de telle sorte qu'il ne dépende pas de x.

II.B.2.c Proposer un protocole à sens unique qui transmet tous les branchements qu'Alice ferait dans le protocole aller-retour.

II.B.2.d Représenter f sous forme de matrice pour pouvoir utiliser les résultats de la partie II.A.2, puis utiliser l'inégalité de la question II.B.2.b.

I. Polygones simples

> Les noms `CreerVecteur` et `CreerSegment` des fonctions proposées commencent par des majuscules, ce qui est déconseillé en caml-light (et interdit en OCaml). Pour cette raison, nous les avons renommées respectivement en `creer_vecteur` et `creer_segment` dans le corrigé. De même, nous utiliserons `i` et non `I` comme nom de variable pour les segments.

I.A.1 Si u et v sont des vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, le déterminant de la matrice formée par ces vecteurs est donné par la formule

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \cdot y' - y \cdot x'$$

et leur produit scalaire par

$$\langle u \mid v \rangle = x \cdot x' + y \cdot y'$$

Les fonctions demandées s'écrivent donc

```
let determinant u v =
  u.xv * v.yv - u.yv * v.xv
;;
```

et

```
let produit_scalaire u v =
  u.xv * v.xv + u.yv * v.yv
;;
```

I.A.2 Notons θ l'angle $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$. Par hypothèse (d'après la remarque en introduction de l'énoncé), les points a et b sont distincts. Il existe donc une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_0, v_0)$, de même orientation (directe ou indirecte) que la base initiale, avec u_0 colinéaire à $\overrightarrow{ab}$ et dans le même sens. Dans cette base, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ab}$ sont $\begin{pmatrix} \|\overrightarrow{ab}\| \\ 0 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{ac}$ sont $\begin{pmatrix} \|\overrightarrow{ac}\| \cos(\theta) \\ \|\overrightarrow{ac}\| \sin(\theta) \end{pmatrix}$ (ce sont les projections du vecteur sur les axes), et le déterminant de la matrice formée par les vecteurs est $\|\overrightarrow{ab}\| \cdot \|\overrightarrow{ac}\| \cdot \sin(\theta)$. Notons M la matrice formée par les vecteurs exprimés dans la base initiale, M′ la matrice formée par les vecteurs exprimés dans la base $\mathcal{B}$ et U la matrice de changement de base de la base initiale (qui est par hypothèse orthonormée) à la base $\mathcal{B}$. La matrice U est une matrice de changement de base entre deux bases orthonormales, elle est donc orthogonale et son déterminant est égal à 1. Ainsi

$$\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{U} \cdot \mathrm{M}') = \det(\mathrm{U}) \cdot \det(\mathrm{M}') = \det(\mathrm{M}') = \|\overrightarrow{ab}\| \cdot \|\overrightarrow{ac}\| \cdot \sin(\theta)$$

Ce déterminant est donc strictement positif si et seulement si une mesure de l'angle $\theta = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ est dans l'intervalle $]0, \pi[$.

$$\boxed{\text{Le triangle } (a, b, c) \text{ est direct si et seulement si } \det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) > 0.}$$

> La formule $\det(\mathrm{M}) = \|\overrightarrow{ab}\| \cdot \|\overrightarrow{ac}\| \cdot \sin(\theta)$ est classique et pouvait être utilisée sans être redémontrée.
>
> Le déterminant de la matrice formée de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est appelé *produit mixte*. D'après une propriété classique, ce dernier est indépendant du choix de la base orthonormée directe dans laquelle sont exprimés les vecteurs (ce que nous avons redémontré dans le cas particulier où $n = 2$).

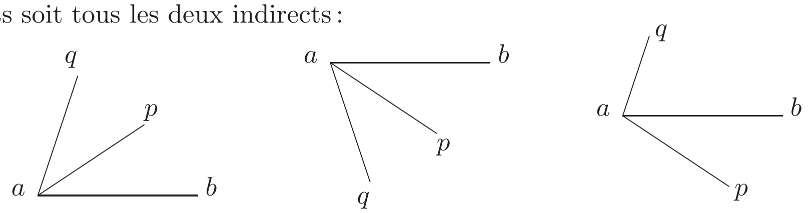
I.A.3 D'après la question précédente, le triangle (a, b, c) est direct si et seulement si $\det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) > 0$. Symétriquement, il est indirect lorsque $\det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) < 0$; et il est aplati quand $\det(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}) = 0$ (les vecteurs $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac}$ sont alors colinéaires).

On en déduit la fonction `direct` :

```
let direct a b c =
  let d = determinant (creer_vecteur a b) (creer_vecteur a c) in
    if d > 0 then 1
    else if d < 0 then -1
    else 0
;;
```

> Il faut penser à utiliser tant que faire se peut la construction `let ... in` afin d'éviter de calculer plusieurs fois le résultat d'une fonction sur les mêmes arguments (ici, le déterminant).

I.A.4 Deux point p et q sont du même côté d'une droite D portée par un segment $\mathrm{I} = [a, b]$ si et seulement si les triangles (a, b, p) et (a, b, q) sont soit tous les deux directs soit tous les deux indirects :



Si l'un des triangles est aplati alors le sommet p ou q correspondant est sur la droite D qui porte $[a, b]$. La fonction demandée est donc

```
let meme_cote i p q =
  match (direct i.a i.b p), (direct i.a i.b q) with
    | 0, _ -> 0
    | _, 0 -> 0
    | 1, 1 -> 1
    | -1, -1 -> 1
    | _, _ -> -1
;;
```

> La fonction demandée pouvait être écrite de façon plus concise mais moins claire en :
>
> ```
> let meme_cote i p q =
>   (direct i.a i.b p) * (direct i.a i.b q)
> ;;
> ```