ENAC Mathématiques toutes filières 2004
Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Lévy (ENS Ulm) ; il a été relu par Benoît Chevalier (ENS Ulm) et Aurélien Alvarez (ENS Lyon).

Ce sujet est constitué de quatre parties totalement indépendantes, de difficultés et de longueurs très inégales. Ces quatre parties couvrent une large partie du programme de première année : développements limités, prolongement de fonctions, polynômes, algèbre linéaire, étude de suites, dérivabilité : presque tout y est abordé.

- La première partie propose d'étudier la famille de fonctions
$$x \longmapsto \frac{x^n \ln x}{x^2-1}$$
prolongées par continuité sur $\mathbb{R}_+^*$, avec n entier positif. Les différences de comportement au voisinage de 1 selon la valeur de n sont mises en évidence grâce à des développements limités. D'éventuels prolongements en 0 ainsi que les comportements asymptotiques au voisinage de l'infini sont également abordés.
- La deuxième partie est la plus courte des quatre. Sous prétexte de faire calculer le polynôme $\det(\mathrm{A}-\mathrm{XI}_3)$, où A est une matrice carrée 3×3, elle permet au candidat de montrer qu'il a bien compris le cours sur les matrices et les polynômes.
- La troisième partie, peut-être la plus difficile, fait appliquer la méthode de Cesàro à une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. La principale difficulté réside dans la manipulation des notions de limite inférieure et de limite supérieure.
- Enfin, la quatrième et dernière partie commence par une étude rapide de la fonction $t \longmapsto \sin t\,/t$ sur $]\,0\,;\pi/2\,]$, prolongée par continuité en 0, qui permet ensuite d'en calculer un encadrement.

Grâce à la grande diversité des thèmes qu'elle aborde, cette épreuve constitue un excellent sujet de révision en fin de première année, ou en tout début de seconde. Mais c'est à condition, bien sûr, de rédiger les réponses et de ne pas se contenter de cocher les (bonnes) cases.

Indications

Partie I

2 Se ramener à un développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

3 Utiliser les questions 1 et 2.

4 Penser à la formule du binôme de Newton.

5 Utiliser les questions 3 et 4.

6 Quelle est la limite de f_n en 1 ?

7 Utiliser la question 5.

8 Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point est donné par la dérivée de la fonction en ce point.

9 Utiliser les questions 5 et 8.

10 Calculer le discriminant du trinôme $3\mathrm{X}^2 - 9\mathrm{X} + 5$.

11 Utiliser les questions 9 et 10.

12 Pour la dérivée de f_n, on peut utiliser la question 4.

13 Étudier la limite de f_n en 0 selon la valeur de n.

16 Utiliser les questions 12, 13 et 15.

18 Utiliser les questions 12 et 17.

Partie II

19 Attention à ne pas confondre la matrice A et sa transposée.

20 Un polynôme scindé est déterminé entièrement par son degré, ses racines (avec leurs multiplicités) et son coefficient dominant.

21 Utiliser la question 20.

22 Utiliser là encore la question 20.

Partie III

23 Comparer $\operatorname*{Inf}_{p\geqslant n} x_p$ et $\operatorname*{Inf}_{p\geqslant n+1} x_p$.

24 Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes hypothèses que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

25 Que se passe-t-il pour $\operatorname*{Inf}_{p\geqslant n} y_p$ si, à partir d'un certain rang, $\operatorname*{Inf}_{p\geqslant n} x_p$ est minorée par un réel a ?
Comparer $\operatorname*{Inf}_{p\geqslant n} -y_p$ et $\operatorname*{Sup}_{p\geqslant n} y_p$.

27 Utiliser la question 23 et exploiter l'exemple de la question 26.

28 Étudier le signe de $u_n - u_{n+1}$ en fonction de celui de θ_n.
Calculer un équivalent de x_n.

29 Utiliser la question 25 puis calculer y_n en fonction de u_{n+1}.

Partie IV

30 Calculer un développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{\sin t}{t}$ en 0.

32 Utiliser la question 31.

Partie I

1 Il s'agit d'un résultat du cours. Pour tout x au voisinage de 0, on a

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)}$$

☐ A ☐ B ☐ C ■ D ☐ E

> Si d'aventure vous aviez oublié vos formules sous le coup du stress, vous pourriez recalculer ce développement limité en utilisant la formule de Taylor :
>
> $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$
>
> Ensuite, il ne reste qu'à calculer des dérivées.

2 Pour tout x au voisinage de zéro on a, d'une part,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

et d'autre part,

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\dfrac{x}{2}}$$

En combinant les deux équations, on obtient pour tout u au voisinage de 0 :

$$\boxed{\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)}$$

Il n'y a donc pas de bonne réponse.

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ■ E

3 Il faut se ramener aux questions précédentes. Comme on doit étudier la fonction f_0 au voisinage de 1, on pose pour simplifier $g(\alpha) = f_0(\alpha+1)$ lorsque α est proche de 0 et on étudie g au voisinage de 0.

On a alors, pour tout α au voisinage de 0,

$$\frac{1}{(\alpha+1)^2 - 1} = \frac{1}{\alpha^2+\alpha} = \frac{1}{\alpha(\alpha+2)}$$

soit

$$g(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{(\alpha+1)^2-1} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha(\alpha+2)}$$

Ainsi, en utilisant les développements limités obtenus aux questions 1 et 2, on calcule pour tout α au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \times \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \alpha^3\varepsilon(\alpha)\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{8} + \alpha^2\varepsilon(\alpha)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)\alpha^2 + \alpha^2\varepsilon(\alpha) \\
g(\alpha) &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{5}{12}\alpha^2 + \alpha^2\varepsilon(\alpha)
\end{aligned}$$

> Pour obtenir un développement limité à l'ordre 2 de g, on a dû utiliser, comme c'est souvent le cas, un développement limité d'ordre supérieur. La raison en est ici la présence du facteur $1/\alpha$.

On trouve donc pour tout x au voisinage de 1 :

$$\boxed{f_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_0(x)}$$

☐ A ■ B ☐ C ☐ D ☐ E

4 Soit n un entier strictement positif. On vérifie, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, que

$$f_n(x) = x^n \times \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f_n(x) = x^n \times f_0(x)}$$

Soit x au voisinage de 0. En utilisant la formule du binôme de Newton, on a

$$x^n = (1+(x-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (x-1)^k$$

soit

$$\boxed{x^n = 1 + n(x-1) + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)}$$

☐ A ☐ B ☐ C ■ D ☐ E

> Attention : la réponse B est fausse car pour $x = 1$, on n'a pas a priori $k_n = f_n(1) = 1^n \times f_0(1) = k_0$.

5 Il suffit de multiplier les développements limités de $x \longmapsto x^n$ et de f_0. Pour tout x au voisinage de 0, on trouve

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= x^n \times f_0(x)\\
&= \Big(1 + n(x-1) + \frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)\Big)\\
&\qquad\qquad \times \Big(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_0(x)\Big)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}n(x-1) - n\frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\varepsilon_n(x)\\
&\qquad\qquad + \frac{n(n-1)}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}(x-1) + \frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_n(x)}$$

☐ A ■ B ☐ C ☐ D ☐ E