Mines Maths 1 PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Aurélien Alvarez (ENS Lyon) ; il a été relu par Walter Appel (Professeur en CPGE) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose une étude des suites « stochastiques », qui sont des suites à termes positifs dont la série numérique associée a pour somme 1. En dépit des apparences, ces suites sont tout à fait naturelles : à partir de toute suite dont la série associée est convergente, on obtient une suite stochastique en divisant chaque terme de la suite par la somme de la série.

Le problème est divisé en neuf étapes, qui peuvent être regroupées en trois temps :

- On montre d'abord que l'ensemble S des suites stochastiques est en bijection avec une certaine classe de fonctions développables en série entière. Des exemples permettent de se faire la main sur les notations introduites.
- On étudie ensuite une loi de composition sur S, qui n'est autre qu'un classique produit de Cauchy, dont on étudie les premières propriétés sur des exemples. On introduit ainsi la moyenne et la variance d'une suite de S. On montre que la variance est une quantité positive.
- Enfin, les résultats obtenus permettent de construire une méthode de calcul effectif de la moyenne et de la variance, méthode qui est mise en œuvre sur les exemples précédemment étudiés.

Le fait que le sujet porte sur des notions reliées aux probabilités ne doit pas effrayer le candidat : toutes les questions s'appuient exclusivement sur le programme des classes préparatoires. Les probabilités jouent ici un rôle de fil conducteur qui donne de l'enjeu à l'étude, ce qui est toujours appréciable.

Indications

2 Étudier la convergence absolue de la série en 1.

3 Ne pas oublier de préciser les rayons de convergence. Pour l'expression intégrale de $\widehat{\mathrm{V}}$, on cherchera à exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.

4 Utiliser la convexité des éléments de F en exploitant le fait que le graphe d'une fonction convexe est en-dessous de toutes ses cordes. Pour la deuxième partie, on se ramènera au cas précédent à partir d'une solution de l'équation.

5 Vérifier le bien-fondé de j en remarquant que l'image de tout élément de S est un élément de F. Pour l'injectivité, penser à l'unicité du développement en série entière.

6 Utiliser le produit de Cauchy.

8 Pour démontrer l'associativité, on pourra utiliser la bijection j et l'associativité du produit sur F.

9 Là encore, ne pas oublier de préciser les rayons de convergence.

10 Utiliser les résultats de la question précédente, l'importante relation trouvée à la question 7 ainsi que la bijection entre les ensembles S et F établie à la question 5.

11 Utiliser le résultat de la question précédente pour passer à la limite.

12 Pour la suite d'éléments de S, penser aux exemples étudiés dans les questions précédentes.

15 On cherchera à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la forme bilinéaire, symétrique et positive étudiée à la question précédente.

16 Utiliser les mêmes arguments qu'à la question 2.

17 Appliquer le théorème de Taylor avec reste intégral.

19 Utiliser les résultats des questions 9 et 16.

Propriétés des fonctions de F et des suites de S

1 Soit f une fonction appartenant à l'ensemble F. Par définition, f est la somme d'une série entière de rayon de convergence R supérieur à 1 : grâce au théorème d'infinie dérivabilité des séries entières sur leur disque de convergence, on sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ et donc, en particulier, f est indéfiniment dérivable sur $]-1\,;1\,[$.

> En effet, rappelons qu'une série entière converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence. On en déduit alors le résultat, puisqu'une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

où a_n est positif ou nul pour tout n puisque $f^{(n)}(0)$ est également positive ou nulle.

On en déduit donc, par croissance de la fonction puissance,

$$0 \leqslant x < x' \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x') - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n ({x'}^n - x^n) \geqslant 0$$

Ainsi, f est croissante sur le segment $[\,0\,;1\,]$.

> Bien entendu, on aurait pu étudier la monotonie de f en examinant le signe de sa dérivée pour en déduire ses variations.

Pour établir la convexité de f, étudions le signe de sa dérivée seconde.

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{(n-2)} \geqslant 0$$

Toute fonction appartenant à F est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-1\,;1\,[$, croissante sur $[\,0\,;1\,]$ et convexe sur $[\,0\,;1\,[$.

> Pour traiter cette question, on peut également remarquer que f est une somme de fonctions toutes croissantes et convexes sur $[\,0\,;1\,]$. Or, on montre facilement qu'une somme (finie) de fonctions croissantes (respectivement convexes) est une fonction croissante (resp. convexe). Le résultat s'en déduit aussitôt par passage à la limite : la convergence simple préserve donc la croissance et la convexité des fonctions.

2 Si f désigne un élément de F, on a

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Or, $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-1\,;1\,] \qquad |a_n x^n| \leqslant |a_n|$$

Par hypothèse, la série de terme général a_n est convergente (sa somme vaut précisément 1). On en déduit que la série $\sum a_n x_n$ converge normalement sur $[-1\,;1\,]$.

En particulier, la convergence est uniforme sur $[-1\,;1]$ et f est donc continue sur ce segment.

$$\boxed{\text{Toute fonction appartenant à l'ensemble F est continue à gauche en 1.}}$$

> Il s'agit d'un résultat général : si une série est absolument convergente sur le cercle d'incertitude (c'est-à-dire que la série $\sum |a_n|\,\mathrm{R}^n$ converge), alors elle est normalement convergente sur le disque fermé de convergence.

Exemples

3 Montrons que les suites G, E^q et V ainsi définies sont dans S.

- La suite G est bien dans S : en effet, tous les termes de la somme sont positifs et

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 1$$

  Calculons l'image de G par j : le théorème de d'Alembert assure que le rayon de convergence de $\widehat{\mathrm{G}}$ est 2 et

$$\forall x \in\,]-2\,;2[\qquad \widehat{\mathrm{G}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$$

  donc
$$\boxed{\forall x \in\,]-2\,;2[\qquad \widehat{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{2-x}}$$

> Rappelons que pour une série à termes strictement positifs $\sum a_n$, le théorème de d'Alembert assure la convergence dès que
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$
> (sous réserve d'existence de la limite bien entendu).

- Étant donné un entier naturel q, E^q appartient à S puisque tous les termes de cette suite sont nuls, excepté le q^{e} qui vaut 1. On en déduit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \widehat{\mathrm{E}}^q = x^q}$$

- Enfin, la suite V appartient elle aussi à S car tous ses termes sont positifs et

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \frac{1}{2} + a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

  Le théorème de d'Alembert permet d'affirmer que le rayon de convergence de $\widehat{\mathrm{V}}$ est 1 et

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\qquad \widehat{\mathrm{V}}(x) = \frac{1}{2} + a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$