Centrale Maths 1 PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (ENS Cachan) ; il a été relu par Julien Lévy (ENS Ulm) et Sébastien Gadat (ENS Cachan).

Ce problème propose, schématiquement, de s'intéresser aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0\,;r\,]$ vérifiant $f(0) = 0$ puis $f(x) < x$. Plus précisément, on considère les classes d'équivalence de la relation « il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme h tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$ » selon les valeurs de la dérivée en 0 de f et de g.

Le sujet est composé de trois parties qui sont liées : la partie II utilise la partie I et dans la partie III, on utilise les mêmes types de raisonnements que dans les deux premières.

- Dans la première partie, qui se traite de manière directe, sans astuce particulière, on établit quelques résultats de convergence (simple, normale, uniforme) de suites et séries de fonctions.
- La partie II se consacre au cas où la dérivée en 0 des fonctions considérées est dans $]\,0\,;1\,[$. On montre qu'il existe alors une unique classe de conjugaison, celle de l'homothétie $x \mapsto \lambda x$, en considérant une suite d'itérés d'une fonction afin de construire un difféomorphisme de conjugaison. On fait usage de formules de Taylor – un petit avant-goût de ce que nous réserve la suite.
- C'est dans la dernière partie, consacrée au cas $f'(0) = 1$, que les choses se compliquent. On y conjugue des éléments par des difféomorphismes bien choisis pour avoir des développements limités particuliers, on y établit des développements asymptotiques d'autres conjugués, et les calculs deviennent rapidement complexes. Il faut, dans cette partie, prêter une attention particulière à la rigueur des réponses : l'énoncé a tendance à focaliser le lecteur sur les aspects calculatoires alors qu'il y a souvent de nombreuses vérifications à effectuer (problème de définition de fonctions, régularité en certains points, etc.) pour pouvoir raisonner proprement. À noter que la partie III.C peut se traiter totalement indépendamment du reste, via les méthodes classiques d'étude des suites récurrentes. Le problème s'achève par l'étude d'une suite récurrente et l'établissement d'un développement asymptotique à trois termes, pour lequel il est demandé d'écrire un programme en Maple.

Globalement, ce sujet très technique est une belle illustration de l'usage des développements limités et asymptotiques en analyse. Les connaissances théoriques requises sont assez modestes : convergence de suites et séries de fonctions et formules de Taylor principalement. Noter également que la difficulté est progressive tout au long du problème et que les parties et sections s'enchaînent logiquement : ainsi, il n'est pas rentable de tenter de « papillonner » au gré des questions (mis à part le cas de la partie III.C).

Indications

Partie I

I.A Dériver la relation de conjugaison entre f et g, et calculer $h(0)$, où h est le difféomorphisme de conjugaison.

I.B.1 Utiliser la définition de la dérivée de f en 0.

I.B.2 Se servir des propriétés de $\mathcal{E}$ pour montrer la convergence.

I.B.3 Étudier la monotonie de f sur $[\,0\,;1\,]$ pour en déduire sa borne supérieure.

I.C Prendre le logarithme de P_n et étudier la série obtenue.

I.D On procèdera de la même manière qu'à la question I.C, en cherchant un encadrement du terme général de la série de fonctions associée à $\ln \mathrm{Q}_n$.

Partie II

Attention : dans cette partie, l'énoncé comporte une erreur. Il faut prendre dans toute la suite $\lambda \in]0,1[$ et non $\lambda \in\,]\,0\,;1\,]$.

II.B.1 Résoudre le système d'inéquations proposé.

II.B.2 Utiliser la définition de la dérivée en 0.

II.C.1 Penser à la formule de Taylor en 0.

II.C.2 Employer le résultat de la question I.B.3.

II.C.3 On appliquera successivement les formules établies en II.C.1 et II.B.2 pour montrer la convergence normale de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

II.D.1 Exprimer en fonction de f le terme général de la série étudiée, et majorer sa norme infinie grâce à un emploi judicieux de la formule de Taylor.

II.D.2 Appliquer la question I.D au résultat précédent.

II.E Utiliser les résultats des questions II.A et II.D.2.

Partie III

III.A.1 Penser au développement limité pour trouver la seconde dérivée non nulle.

III.A.2.a Exprimer a comme une limite.

III.A.2.b Utiliser le résultat de la question I.A. Donner un développement limité de g en 0.

III.A.3.b Partir de la relation $h \circ h^{-1} = \mathrm{Id}$.

III.A.3.c Utiliser le développement limité de f, puis celui de $h \circ f$.

III.A.4 Employer les idées et résultats de la question III.A.3 pour construire la fonction $g = h \circ f \circ h^{-1}$, où h est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme bien choisi.

III.B.1.a Calculer d'abord $\tau_q \circ g$.

III.B.1.c Commencer par appliquer le développement limité de g en 0 à ${\tau_q}^{-1}$.

III.B.2.a Étudier la série de terme général $\mathrm{G}^{n+1}(x) - \mathrm{G}^n(x)$, en utilisant les résultats des questions I.B.3 et III.B.1.c.

III.B.2.b Utiliser les questions III.B.2.a et III.B.1.c.

III.B.2.c Majorer le terme $v_{n+1}(x) - v_n(x)$ sur $[\,1\,;\mathrm{X}\,]$, puis sommer.

III.B.2.d Calculer $v_n \circ \mathrm{G}$ et passer à la limite.

III.B.3.a On pourra montrer que $\mathrm{H} = \mathrm{G} \circ \tau_q - \tau_q$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[\,0\,;1\,]$, puis dériver son développement limité.

III.B.3.b Étudier la monotonie de v. Reproduire le raisonnement de la question I.D, comme dans la partie II.D.

III.B.4.a Appliquer le théorème d'interversion des limites à la suite $({v_n}')_{n\in\mathbb{N}^*}$. Employer les résultats de la section III.B.3.

III.B.4.b Utiliser la fonction v et la question III.B.2.d pour montrer que $([\,0\,;1\,]\,,g)$ est conjugué à $([\,0\,;1\,]\,,\theta_q)$.

III.C.1.a Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et qu'il existe I tel que $(\mathrm{I}, \mathrm{sh} \circ \sin)$ appartienne à $\mathcal{E}_1^*$. Calculer alors les itérés de θ_q pour $q = \nu(\mathrm{sh} \circ \sin)$.

III.C.1.b Sommer les développements asymptotiques de ${w_{n+1}}^{1-q} - {w_n}^{1-q}$, et itérer le procédé pour préciser les développements.

III.C.2 Le plus simple est de déterminer successivement des valeurs approchées de a, b et c par un procédé itératif.

I. Préliminaires

I.A Soient (I, f) et (I, g) deux éléments conjugués de $\mathcal{E}$: il existe alors deux réels strictement positifs r et r' tels que $[\,0\,;r\,] \subset \mathrm{I}$ et $[\,0\,;r'\,] \subset \mathrm{I}$, et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant h de $[\,0\,;r\,]$ sur $[\,0\,;r'\,]$ tel que

$$\forall\, y \in [\,0\,;r'\,] \qquad g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y) \qquad (\mathbf{1})$$

Comme h est un difféomorphisme croissant de $[\,0\,;r\,]$ sur $[\,0\,;r'\,]$, il envoie le minimum de $[\,0\,;r\,]$ sur le minimum de $[\,0\,;r'\,]$, soit $h(0) = 0$. En outre, $h'(0) \neq 0$. La dérivée en 0 de sa réciproque h^{-1} est alors

$$\left(h^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{h'\left[h^{-1}(0)\right]} = \frac{1}{h'(0)}$$

Notons que $f \in \mathcal{E}$ donc $f(0) = 0$. Il vient alors par dérivation de $(\mathbf{1})$

$$g'(0) = \left(h^{-1}\right)'(0) \times (h \circ f)'(0)$$

soit
$$g'(0) = \underbrace{\left(h^{-1}\right)'(0) \times h'(0)}_{=1} \times f'(0)$$

Ainsi,
$$\boxed{f'(0) = g'(0)}$$

> Pour retrouver la formule de la dérivée de la réciproque, il suffit de partir de la relation $h \circ h^{-1}(y) = y$: on obtient
>
> $$\forall\, y \in [\,0\,;r'\,] \qquad \left(h^{-1}\right)'(y) \times h'\left[h^{-1}(y)\right] = 1$$
>
> On retrouve au passage la condition $h' \neq 0$ pour un difféomorphisme. Il est d'ailleurs beaucoup plus sûr de procéder comme cela plutôt que d'apprendre « bêtement » une formule... avec tous les risques de confusion et d'oubli que cela peut comporter.

I.B.1 Soit un couple $([\,0\,;1\,], f) \in \mathcal{E}$; alors la fonction f laisse stable $[\,0\,;1\,]$. Par définition de l'ensemble $\mathcal{E}$, on a $f'(0) > 0$ et

$$\forall\, x \in \,]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant x \leqslant 1 \qquad (\mathbf{2})$$

donc
$$\forall\, x \in \,]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1$$

Comme f est dérivable en 0, il vient $0 \leqslant f'(0) \leqslant 1$ par passage à la limite quand x tend vers 0. De ce fait,

$$\boxed{f'(0) \in \,]\,0\,;1\,]}$$