CCP Physique 1 PC 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Matthieu Rigaut (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est composée de deux problèmes.

- Le premier problème traite essentiellement de mécanique des fluides mais comporte quelques questions sur l'électromagnétisme. Il débute par une première partie de cinématique consacrée à l'étude générale des lignes de courant dans un écoulement. La deuxième partie dégage ensuite les analogies entre la mécanique des fluides et l'électrostatique et démontre qu'il est possible de caractériser l'écoulement fluide autour d'un obstacle par un dispositif électrostatique simple. La fin du problème envisage, dans la troisième partie, l'application de ces analogies à l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre fixe, puis d'un cylindre en rotation dans la quatrième. Ce sujet forme un ensemble original.
- Le deuxième problème, nettement plus classique, est consacré à l'étude thermodynamique d'un échangeur thermique. Une première partie comporte des considérations générales sur la conduction thermique. Les résultats obtenus sont développés dans la deuxième partie sur le cas particulier d'un tube cylindrique. On y introduit la notion de résistance thermique que l'on généralise ensuite au transfert convectif et au rayonnement thermique. Bien que totalement indépendante des autres, la troisième partie est dans la suite logique du problème. Le tube échangeur y est alors parcouru par un courant électrique et l'effet Joule permet l'échauffement ou la vaporisation de l'eau qui le parcourt. L'énoncé donne un résultat intermédiaire essentiel qui aide grandement à la résolution de cette partie. Il s'agit d'un bon problème d'application et de révision des transferts thermiques.

Si l'énoncé est assez long, il apparaît que très peu de questions nécessitent de longs calculs. Dans les deux problèmes, des raisonnements classiques et proches du cours jouxtent des questions demandant plus d'analyse et une bonne compréhension de l'énoncé. Cette épreuve s'inscrit bien dans l'esprit de la filière PC.

Indications

Premier problème

I.1 L'équation de continuité est l'équation locale de conservation de la masse.

I.2 Partir de l'hypothèse d'incompressibilité.

I.3 Un déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ le long d'une ligne de courant est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{V}}$.

I.4 Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}}$ en coordonnées cartésiennes.

I.5 Le débit volumique traversant une surface de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{dS}}$ est $\mathrm{dD_v} = \overrightarrow{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$.
Exprimer $\overrightarrow{n}$ en fonction de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$.

I.6 Projeter et calculer $\overrightarrow{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{\tau}\,\mathrm{d}\ell$.
Justifier qu'un déplacement perpendiculaire à la vitesse est tel que $\mathrm{d}\phi$ est nul.

II.1 Calculer $\mathrm{dQ}/\mathrm{d}t$ en fonction de ρ puis de $\overrightarrow{\jmath}$ et utiliser la formule d'Ostrogradski.
Utiliser les deux premiers résultats et faire l'hypothèse stationnaire.

II.2 Utiliser $\mathrm{dI} = \overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}}$.

II.3 Utiliser l'expression de $\mathrm{d}\psi$ de la question I.5 pour démontrer, en corrigeant l'énoncé, $\psi \equiv -\mathrm{I}/\sigma h$.

III.2 Justifier que les lignes de courant électriques ne doivent pas pénétrer le cylindre.

III.5 La symétrie de l'écoulement a une conséquence évidente sur F_x et F_y.

IV.2 La rotation du cylindre peut renforcer ou diminuer la vitesse de l'écoulement.

IV.4 Utiliser le théorème de Bernoulli en précisant bien les hypothèses.
Intégrer la force de pression élémentaire $-\mathrm{P}\,\mathrm{dS}\,\overrightarrow{e_r}$ projetée selon $\overrightarrow{e_y}$.

IV.5 Justifier pour une circulation élémentaire $\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}\phi$.

IV.8 Relier le débit $\mathrm{Q_v}$ en l'absence d'obstacle à $\mathrm{V_0}$ d'une part et à la variation de la fonction ψ entre les deux plaques d'autre part.

Second problème

I.3 Partir de $\mathrm{dT} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

I.4 Utiliser la formule d'Ostrogradski.

I.5 Identifier $[a]$ à l'aide de la dimension des dérivées de T.

II.1 Montrer que $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\,\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}r}\right] = 0$ et intégrer deux fois.

II.4 Calculer le flux convectif ϕ_c au travers de la surface considérée.

II.5 Exprimer $\mathrm{T_p}$ et $\mathrm{T_{amb}}$ en fonction de $\mathrm{T_m}$ et de $\Delta\mathrm{T} = (\mathrm{T_p} - \mathrm{T_{amb}})/2$. Utiliser le développement de Taylor à l'ordre 1, $(1+u)^4 = 1 + 4u$.
Considérer l'association parallèle des résistances convective et radiative.

II.6 Faire une analogie entre le tube et l'isolant. Le rayon extérieur est $r_2 + e$.

II.7 Montrer qu'il peut exister une épaisseur e_c pour laquelle le flux ϕ est maximal.

III.1 La puissance volumique dissipée par effet Joule est $\overrightarrow{\jmath} \cdot \overrightarrow{\mathrm{E}}$.

III.2 Justifier que l'énergie dégagée par effet Joule pendant $\mathrm{d}t$ par un élément de longueur $\mathrm{d}x$ est emportée par le fluide qui l'a traversé pendant $\mathrm{d}t$.

III.3 Considérer l'écoulement diphasé entre x_e et $x_\mathrm{e} + d$ et adapter la question III.2 en reliant la variation d'enthalpie $\mathrm{d}h$ à la variation dX de la fraction massique en vapeur.

I. Analogies rhéoélectriques

I. Questions préliminaires

I.1 L'équation de continuité traduit la conservation de la masse. Elle s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \overrightarrow{\mathrm{V}}) = 0$$

où ρ est la masse volumique du fluide. Comme le fluide est incompressible, ρ est une constante et l'équation de continuité donne

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{V}} = 0}$$

Les deux propositions mathématiques suivantes sont équivalentes :

$$\exists \phi \quad \overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \phi \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{0}$$

La condition recherchée est donc que l'écoulement soit irrotationnel.

> Pour une raison évidente, on parle aussi d'écoulement potentiel.

En projetant $\overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$, il vient

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}}$$

I.2 D'après l'équation de continuité,

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{V}} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

En remplaçant les composantes v_x et v_y selon le résultat de la question précédente,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

d'où l'équation de Laplace $\boxed{\Delta \phi = 0}$

> On peut aussi écrire directement $\mathrm{div}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \phi = \Delta \phi$ pour toute fonction ϕ.

I.3 La vitesse $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ et le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ le long d'une ligne de courant sont colinéaires puisqu'une ligne de courant est tangente au vecteur vitesse en tout point. Dans le plan $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, il existe donc un réel k tel que

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = k\,\overrightarrow{\mathrm{V}} \qquad \text{soit} \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Avec $k = \mathrm{d}x/v_x$ et $k = \mathrm{d}y/v_y$, il vient bien

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y}}$$

I.4 La différentielle de la fonction ψ s'écrit

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{d}\psi = -v_y\,\mathrm{d}x + v_x\,\mathrm{d}y$$

Or, selon la question précédente, le long d'une ligne de courant

$$v_x\,\mathrm{d}y - v_y\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{d}\psi = 0$$

et on peut affirmer que la fonction ψ est constante le long d'une ligne de courant.

L'écoulement est irrotationnel donc, dans tout l'écoulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{V}} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dans la base cartésienne, où $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ est une fonction de (x, y). La projection selon $\overrightarrow{e_z}$ conduit à

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \text{soit} \qquad -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

d'où
$$\boxed{\Delta \psi = 0}$$

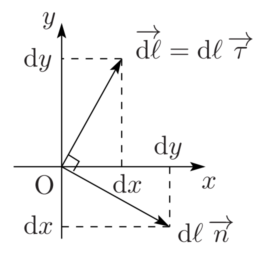
I.5 On considère la surface élémentaire $\mathrm{dS} = h\,\mathrm{d}\ell$ de hauteur h perpendiculairement au plan de l'écoulement. Le débit volumique élémentaire traversant cette surface est

$$\mathrm{dD_v} = \overrightarrow{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \overrightarrow{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{dS}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal et $\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \mathrm{dS}\,\overrightarrow{n}$ le vecteur surface. Alors, avec $\mathrm{dD_v} = h\,\mathrm{dQ_v}$ et $\mathrm{dS} = h\,\mathrm{d}\ell$, on obtient le débit volumique élémentaire par unité de hauteur :

$$\boxed{\mathrm{dQ_v} = \overrightarrow{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\ell}$$

Par définition, les vecteurs $\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{\tau}$ sont perpendiculaires et de même norme. Selon la figure ci-contre, on a alors



$$\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{n} = \mathrm{d}y\,\overrightarrow{e_x} - \mathrm{d}x\,\overrightarrow{e_y}$$

d'où
$$\overrightarrow{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\ell = v_x\,\mathrm{d}y - v_y\,\mathrm{d}x$$

On reconnaît l'expression de la différentielle de ψ trouvée à la question précédente et il vient bien

$$\boxed{\mathrm{d}\psi = \overrightarrow{\mathrm{V}} \cdot \overrightarrow{n}\,\mathrm{d}\ell}$$

On détermine le débit volumique par unité de hauteur à travers l'arc $(\mathrm{A_1A_2})$ en sommant le débit volumique élémentaire $\mathrm{dQ_v}$ le long de l'arc entre les points $\mathrm{A_1}$ et $\mathrm{A_2}$. Ainsi,

$$\mathrm{Q_v} = \int_{\mathrm{A_1}}^{\mathrm{A_2}} \mathrm{dQ_v}$$