Mines Physique 1 MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Langlois (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-Luc Robert (ESPCI) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite de quelques problèmes physiques posés par la plongée sous-marine : équilibre mécanique du plongeur, remplissage et fonctionnement d'une bouteille d'air comprimé, accidents de décompression.

Dans la première partie, on étudie la flottabilité du plongeur en apnée, en faisant appel à l'hydrostatique. La deuxième partie aborde le principe de fonctionnement du compresseur utilisé pour remplir les bouteilles, et celui du détendeur. Enfin, la dernière partie est une étude de la diffusion de l'azote dans les tissus humains.

Le sujet est très court : la clarté de la rédaction n'en est que plus importante. Les deux premières parties sont très abordables et ne font appel qu'à des notions élémentaires de thermodynamique. Seule la dernière partie, consistant à résoudre l'équation de la diffusion à une dimension, et dont les questions sont assez laconiques, présente quelques difficultés.

La dernière question en particulier, où l'on résout l'équation de la diffusion pour une condition initiale discontinue, tranche avec le reste du sujet. En effet, elle est rédigée de manière ambiguë et guide très peu le candidat. Elle nécessite beaucoup de soin dans la rédaction, et en particulier une bonne maîtrise du cours de mathématiques sur les séries de Fourier.

Indications

Partie II

4 La quantité d'air dans l'ensemble « cylindre + bouteille » reste constante pendant la compression.

5 On ne peut plus comprimer l'air du cylindre si $V' \leqslant V_{\text{min}}$.

8 Résoudre d'abord l'équation sans second membre $\dfrac{dp}{dt} = -V_{\text{min}} \dfrac{\alpha}{V_b + V_{\text{min}}} p(t)$.
Chercher ensuite une solution particulière constante.

9 Appliquer deux fois la loi des gaz parfaits.

10 Calculer la quantité d'air inspirée en un temps dt puis intégrer.

Partie III

12 Diviser l'équation de diffusion en f et g par $f(x)g(t)$.
Rappel : si pour tous x et t, $F(x) = G(t)$, alors $F(x) = G(t) = C^{\text{te}}$.

15 Montrer que $K = C_s$ et pour tout $q \neq 0$, $A_q = 0$.
Prolonger $C(x, 0)$ en une fonction créneau 2L-périodique, centrée en $C_s(z)$. Décomposer ce créneau en série de Fourier à l'aide de la formule donnée par l'énoncé. Celle-ci comporte une faute de frappe : il faut lire

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(u) \sin(n\omega_0 u) du$$

Identifier ensuite les coefficients de Fourier avec les termes B_q recherchés.

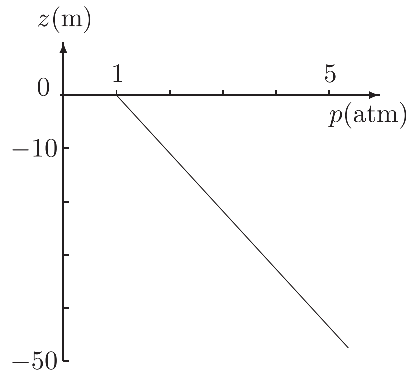
I. Plongée libre (sans bouteille)

1 Utilisons l'équation de la statique des fluides

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, p = -\rho\, \overrightarrow{g}$$

En projetant cette relation sur la base cartésienne, comme l'axe (Oz) est orienté selon la verticale ascendante, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$



On déduit des deux premières équations que p ne dépend que de z, et en intégrant la troisième entre $z = 0$ et $z < 0$, il vient

$$\boxed{\begin{aligned} p(z) &= -\rho g z + \mathrm{P_{atm}} \\ &= -9,81\,.\,10^3 \times z + 1,01\,.\,10^5\ \mathrm{Pa} \end{aligned}}$$

> L'énoncé est incohérent dans le nombre de chiffres significatifs donnés pour les applications numériques : la valeur de $\mathrm{P_{atm}}$ est donnée avec quatre chiffres significatifs, g avec trois alors que ρ n'en a que deux. Plus loin dans l'énoncé, les volumes sont donnés avec un seul chiffre significatif ! Normalement, dans une situation où les données numériques sont connues avec des précisions différentes, on doit calculer avec le nombre de chiffres significatifs le plus faible. Ce qui veut dire qu'en toute rigueur, on devrait donner des applications numériques à deux chiffres dans cette première partie et un seul dans la deuxième. Ce n'est pas raisonnable. En fait, force est de constater que l'énoncé est totalement laxiste sur ce point comme malheureusement beaucoup de sujets de concours. Que faire dans une telle situation ? Choisir deux ou trois chiffres significatifs et s'y tenir tout au long de l'énoncé. Nous choisissons d'en donner trois.

2 Le plongeur bloque sa respiration : la quantité d'air contenue dans ses poumons reste constante. Or la température est également constante, de sorte que la loi des gaz parfaits donne

$$p\,\mathrm{V} = n\mathrm{RT_i} = \mathrm{C^{te}}$$

On a donc

$$p(z)\,\mathrm{V}(z) = \mathrm{P_{atm}\,V_M}$$

soit, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$\boxed{\mathrm{V}(z) = \frac{\mathrm{P_{atm} V_M}}{\mathrm{P_{atm}} - \rho g z}}$$

Application numérique : $\boxed{\mathrm{V}(-10\ \mathrm{m}) = 3,56\ \mathrm{L}}$

On constate que si la profondeur $(-z)$ augmente, la capacité pulmonaire du plongeur $V(z)$ diminue ; son volume total diminue donc également. La masse volumique de l'eau étant uniforme, la poussée d'Archimède $\Pi = \rho g V_{\text{tot}}$ subie par le plongeur varie comme son volume. Elle diminue donc si la profondeur augmente, alors que le poids du plongeur reste le même. Par conséquent, **la flottabilité diminue quand la profondeur augmente**.

3 Le volume du lest étant négligeable, le plongeur subit une poussée d'Archimède

$$\overrightarrow{\Pi} = -\rho\,(V_0 + V(z))\,\overrightarrow{g}$$

et son poids est
$$\overrightarrow{P} = (m + m_1)\,\overrightarrow{g}$$

La flottabilité est nulle en z_0 si le poids et la poussée d'Archimède s'équilibrent, c'est-à-dire si :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{\Pi}(z_0) = \overrightarrow{0}$$

ou encore
$$m + m_1 = \rho\,(V_0 + V(z_0))$$

d'où
$$\boxed{m_1 = \rho\left(V_0 + \frac{P_{\text{atm}} V_M}{P_{\text{atm}} - \rho g z_0}\right) - m = 1,72\ \text{kg}}$$

II. Plongée avec bouteille et détendeur

Remplissage de la bouteille

4 Le mouvement aller du piston remplit le cylindre d'air à la pression P_{atm}. À la fin de ce premier mouvement, le système contient donc un volume d'air $V_{\text{max}}+V_b$ à la pression P_{atm}. Lors de la compression (retour du piston), la température est constante et la quantité d'air dans le système également (la soupape S étant fermée). On peut alors écrire $pV = nRT_a = C^{te}$. À la fin du cycle, la soupape S' est ouverte : l'air est maintenant contenu dans le volume $V_{\text{min}} + V_b$ et il est à la pression P_b. Il vient donc

$$P_b(V_{\text{min}} + V_b) = P_{\text{atm}}(V_{\text{max}} + V_b)$$

soit
$$\boxed{P_b = P_{\text{atm}}\,\frac{V_{\text{max}} + V_b}{V_{\text{min}} + V_b}}$$

En faisant l'hypothèse $V_{\text{min}} \ll V_b$, le résultat précédent se simplifie :

$$\boxed{P_b = P_{\text{atm}}\left(1 + \frac{V_{\text{max}}}{V_b}\right) = 1,42\,.\,10^5\ \text{Pa}}$$

Or,
$$\Delta n = \frac{(P_b - P_{\text{atm}})V_b}{RT_a}$$

d'où
$$\boxed{\Delta n = \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{RT_a} = 8,32\,.\,10^{-2}\ \text{mol}}$$