Mines Maths 1 MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Dudas (ENS Ulm) ; il a été relu par David Lecomte (Professeur en CPGE) et Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE).

L'épreuve se compose de trois parties représentant les différentes étapes du calcul de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\, t}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}\,\mathrm{d}t$$

Elles ne sont pas indépendantes ; cependant, la plupart des résultats sont donnés et permettent d'avancer dans le problème.

- Dans la première partie, on étudie la fonction à intégrer et on effectue un développement en série de l'intégrale. Ce développement fait apparaître une famille dénombrable d'intégrales, dont le calcul passe par l'étude de la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

- Cette fonction est l'objet de la deuxième partie. On s'attache d'abord à sa régularité pour ensuite exhiber une équation différentielle qu'elle vérifie, et obtenir ainsi sa valeur.
- La troisième partie est dédiée au calcul final de l'intégrale I. La théorie des séries de Fourier permet de simplifier encore son expression. On termine enfin le calcul en déterminant l'exponentielle de I.

Le sujet du problème est classique et utilise les outils habituels de manipulation de séries et d'intégrales. Les dernières questions, assez calculatoires, reflètent bien l'inquiétude du jury sur les difficultés qu'ont les candidats à mener à bien leurs calculs. Le problème est assez long pour une épreuve de trois heures : même si les deux premières parties peuvent être traitées rapidement, la dernière nécessite du temps et de la concentration.

Indications

Première partie

1 Calculer un équivalent de φ en 0.

2 Relier la dérivée de φ à ψ puis dériver ψ pour étudier son signe.

3 Utiliser la question 1 pour le point 0 et majorer φ au voisinage de l'infini par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

4 Vérifier que le théorème de convergence monotone s'applique. Penser ensuite à intégrer par parties.

Deuxième partie

5 Pour la continuité, justifier l'emploi du théorème de continuité dominée. En ce qui concerne la limite, effectuer le changement de variable $u = x\,t$ et majorer soigneusement.

6 Appliquer deux fois le théorème de dérivation dominée sous le signe somme sur les ensembles du type $[\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$.

7 Intégrer par parties.

8 Résoudre l'équation caractéristique pour trouver la solution de l'équation homogène puis utiliser la méthode de variation des constantes.

9 Utiliser la question précédente et la formule $\sin(a - b) = \sin a\, \cos b - \cos a\, \sin b$.

Troisième partie

10 Utiliser les questions 4 et 9.

11 Faire une intégration par parties puis valider l'échange somme-intégrale par une majoration directe, utilisant l'intégrabilité de la fonction $u \longmapsto 1/(u + \pi)^2$.

12 Pour la parité de G, montrer que l'on peut se ramener au segment $[0, 2\,\pi]$. Calculer ensuite les coefficients réels de la série trigonométrique en effectuant éventuellement des intégrations par parties.

14 Faire le changement de variable $t = u + \pi$ puis calculer l'intégrale de la fraction rationnelle obtenue.

15 Exprimer $\mathrm{I_N}$ en fonction des réels a_k.

16 Utiliser la formule de Stirling.

17 Remarquer que

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi t} + 1} = \frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}$$

Première partie

1 Pour qu'une fonction soit prolongeable par continuité en un point, il faut et il suffit qu'elle admette une limite finie en ce point. Pour montrer que c'est le cas pour φ au point 0, effectuons un développement limité du numérateur et du dénominateur. Il vient :

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{Arctan} t}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1} = \frac{t + \mathrm{o}(t)}{1 + \pi t + \mathrm{o}(t) - 1} \underset{t \to 0_+}{\sim} \frac{1}{\pi}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \varphi(0) = \frac{1}{\pi}.}$

> Les développements limités en 0 des fonctions usuelles doivent être connus. Ils rendent compte du comportement de la fonction au voisinage de 0 et permettent de calculer des équivalents de fonctions plus générales. En cas d'oubli, on peut utiliser la formule de Taylor-Young :
>
> $$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, t + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, t^n + \mathrm{o}(t^n)$$

2 La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule jamais. Afin d'étudier les variations de φ, on peut alors chercher le signe de sa dérivée, donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi'(t) = \frac{(1+t^2)^{-1}(\mathrm{e}^{\pi t} - 1) - (\operatorname{Arctan} t)\,(\pi\, \mathrm{e}^{\pi t})}{(\mathrm{e}^{\pi t} - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi t}}{(\mathrm{e}^{\pi t} - 1)^2}\, \psi(t)$$

On est donc ramené à l'étude du signe de ψ, elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui nécessite le calcul de sa dérivée :

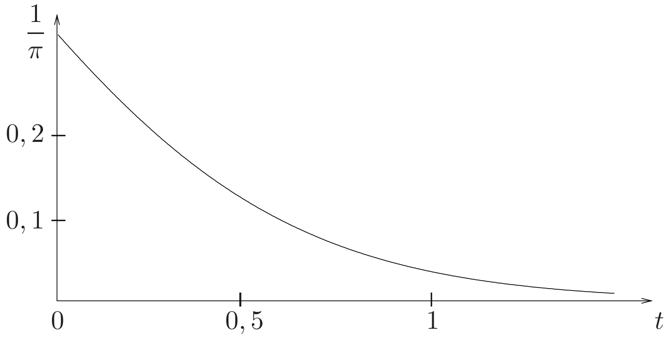
$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \psi'(t) &= \frac{\pi\, \mathrm{e}^{-\pi t}\,(1+t^2) - 2t\,(1 - \mathrm{e}^{-\pi t})}{(1+t^2)^2} - \frac{\pi}{1+t^2} \\
&= \frac{\pi\, \mathrm{e}^{-\pi t}\,(1+t^2) - 2t\,(1 - \mathrm{e}^{-\pi t}) - \pi\,(1+t^2)}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{\pi\,(1+t^2)(\mathrm{e}^{-\pi t} - 1) - 2t\,(1 - \mathrm{e}^{-\pi t})}{(1+t^2)^2} \\
\psi'(t) &= \frac{\mathrm{e}^{-\pi t} - 1}{(1+t^2)^2}\,(\pi + 2t + \pi t^2) \; < \; 0
\end{aligned}$$

Cela montre que la fonction ψ est strictement décroissante et, étant donné que $\psi(0) = 0$, la dérivée de φ reste strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit le tableau de variation suivant :

	0	$+\infty$
φ	$1/\pi$ $\searrow$	0
φ'	$\Vert$	$-$

Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\sup_{t \in \mathbb{R}_+^*} \varphi(t) = \frac{1}{\pi}}$

Voici l'allure du graphe de φ :



3 La fonction φ étant continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité à l'intervalle $[0, +\infty[$, il suffit de prouver qu'elle est intégrable au voisinage de l'infini pour justifier l'existence de I. La majoration

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad |\varphi(t)| \leqslant \frac{\pi}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}$$

permet de conclure. En effet,

$$\frac{\pi}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} \pi \mathrm{e}^{-\pi t}$$

et cette dernière fonction est positive et intégrable au voisinage de l'infini, si bien que

$$\boxed{\text{L'intégrale I est bien définie.}}$$

> Attention à ne pas utiliser des fonctions de référence de signe non constant pour justifier que l'intégrale d'une fonction converge. Par exemple, on peut montrer que $\displaystyle\lim_{\mathrm{X} \to +\infty} \int_1^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe, alors que $\dfrac{1}{t} = \mathrm{o}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{\sqrt{t}}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrale en $+\infty$.

4 Pour tout réel t strictement positif, on a $|\mathrm{e}^{-\pi t}| < 1$, ce qui permet d'écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{1 - \mathrm{e}^{-\pi t}} = \mathrm{e}^{-\pi t} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\pi t}$$

Il s'agit alors d'échanger l'intégration et la sommation, ce que l'on effectue en vérifiant les hypothèses du théorème de convergence monotone. Pour cela, posons :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_k(t) = \mathrm{e}^{-k\pi t} \operatorname{Arctan} t$$

Les fonctions $(f_k)_{k \geqslant 1}$ sont toutes continues et positives sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement puisque l'on reconnaît une série géométrique :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \sum_{k \geqslant 1} f_k(t) = \operatorname{Arctan} t \times \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{e}^{-\pi t})^k$$
$$= \mathrm{e}^{-\pi t} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1 - \mathrm{e}^{-\pi t}} = \frac{\operatorname{Arctan} t}{\mathrm{e}^{\pi t} - 1}$$

La somme de cette série n'est autre que φ, qui est continue et dont on a déjà vérifié l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ à la question 3. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t}$$