CCP Maths 2 MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Starynkévitch (ENS Cachan) ; il a été relu par Sébastien Gadat (Enseignant-chercheur à l'Université) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème traite d'un calcul fonctionnel sur les matrices : il s'agit, en partant d'une fonction f supposée de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle contenant le spectre d'une matrice A, de définir convenablement une matrice $f(\mathrm{A})$, définition qui prolonge celle de polynôme d'une matrice.

Le sujet commence par quelques préliminaires, qui démontrent divers résultats qui seront utilisés plus loin.

- La première partie est purement de l'analyse (manipulation de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle). Elle introduit une relation d'équivalence nécessaire à la suite du problème.
- La deuxième partie définit de manière non ambiguë une matrice $f(\mathrm{A})$, à partir d'une matrice A et d'une fonction f de la variable réelle. Notamment, il est démontré que cette définition prolonge bien celle, déjà connue, de polynôme d'une matrice.
- La troisième partie donne quelques arguments dans le but de pouvoir calculer facilement $f(\mathrm{A})$, en offrant par la suite l'occasion d'appliquer ces arguments sur des exemples.
- La quatrième partie élabore quelques propriétés générales naturelles sur les objets définis, notamment le fait que l'application $f \mapsto f(\mathrm{A})$ est un morphisme d'algèbres, ainsi que des conditions d'inversibilité.
- La dernière partie traite cette fois de propriétés analytiques (une certaine condition de continuité de l'application $\mathrm{A} \mapsto f(\mathrm{A})$), et en déduit que l'exponentielle d'une matrice est également définie de manière non ambiguë. La dernière question est une application à la résolution d'un système différentiel.

Ce problème, dont l'enjeu est véritablement intéressant, est plutôt long et moyennement difficile. Il est original, bien qu'il fasse intervenir nombre d'outils classiques, en algèbre comme en analyse. Il constitue en conséquence un excellent sujet de révision. Il doit être fait dans l'ordre, car les parties ne sont pas indépendantes. Toutefois, les résultats utiles pour poursuivre le problème sont donnés par l'énoncé, exceptées les applications des résultats théoriques établis.

Indications

Préliminaires

1 Revenir aux définitions des normes de l'énoncé.

2.a Revenir à la définition d'une norme.

2.b Penser à l'équivalence des normes en dimension finie.

2.c Utiliser la question précédente.

I. Une relation d'équivalence sur $\mathscr{C}_{\mathrm{I}}^{\infty}$

3.a Penser à la formule de Taylor avec reste intégral.

4.a Utiliser la formule de Leibnitz.

4.b Faire une récurrence sur le nombre r de racines du polynôme Π_{A}.

5 Montrer que $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ est divisible par chaque $(\mathrm{X}-\lambda_j)^{m_j}$.

II. Définition de la matrice $f(\mathbf{A})$

6 Montrer que φ est linéaire et injective à l'aide de la question 5.

7 Utiliser de manière adéquate la bijectivité de φ établie à la question précédente.

8 Effectuer la division euclidienne de f par Π_{A} et vérifier que le reste est bien égal à P_f.

9.a Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, ainsi que le fait que A n'est pas une matrice scalaire (ce qui permet de minorer le degré du polynôme minimal).

III. Le calcul systématique de $f(\mathbf{A})$

10 Prendre l'image réciproque par φ de la base « canonique » de $\mathbb{R}^m$.

11 Constater que (Q_{ij}) est une base de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$, et que l'application $\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{A}]\subset\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

13.a Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer alors, en utilisant le théorème du rang pour traiter la valeur propre double, qu'il s'agit – au signe près – du polynôme minimal de A.

13.b Utiliser la même méthode d'identification qu'à la question précédente.

IV. Un calcul fonctionnel sur la matrice A

14.b Utiliser la formule de Leibnitz, ainsi que la question 5.

15.a Utiliser la question précédente.

15.b Utiliser la question 4.b.

17 Montrer que $\mathcal{M}_{\mathrm{A}}=\mathbb{R}[\mathrm{A}]$.

18 Montrer que si B est un élément inversible de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors B^{-1} est un polynôme en B.

19 Trigonaliser A. En déduire une expression de $\det f(\mathrm{A})$.

20 Déduire de la trigonalisation de A une expression du polynôme caractéristique de $f(\mathrm{A})$.

V. Application à la résolution d'un système différentiel

21 Utiliser les questions 11 et 2.c.

22 C'est une application de la question précédente.

Préliminaires

1 Revenons aux définitions de l'énoncé. Soit $\mathrm{X} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $\mathrm{M} = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors, par définition,

$$\mathrm{MX} = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \qquad \text{avec} \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j.$$

Compte tenu des définitions données par l'énoncé des normes

$$\|\mathrm{M}\| = n \operatorname*{Max}_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}| \qquad \text{et} \qquad \|\mathrm{X}\|_\infty = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

il vient
$$\begin{aligned} |y_i| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|\,|x_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{\|\mathrm{M}\|}{n} \|\mathrm{X}\|_\infty \;=\; \|\mathrm{M}\|\,\|\mathrm{X}\|_\infty \end{aligned}$$

Ceci étant vrai quel que soit l'indice i, on obtient, en prenant le maximum :

$$\boxed{\|\mathrm{MX}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{M}\|\,\|\mathrm{X}\|_\infty}$$

2.a Pour répondre à la question, revenons à la définition d'une norme, et montrons que $\mathcal{N}$ vérifie chacune des propriétés d'une norme :

> Rappelons brièvement la définition d'une norme. Si E est un espace vectoriel, une application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur E si elle vérifie, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathrm{E}$ les propriétés suivantes : $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\,\mathrm{N}(x)$ (homogénéité), $\mathrm{N}(x+y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ (inégalité triangulaire) et $[\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0]$ (séparation).

- **Définition :** pour commencer, remarquons que $\mathcal{N}$ est bien définie sur $\mathcal{M}$ (car la décomposition d'un élément de $\mathcal{M}$ dans la base β existe et est unique), et est bien à valeurs réelles positives.

  > En général, lorsque des normes « exotiques » apparaissent dans un énoncé, il importe toujours de démontrer que la définition de la norme est bien sans ambiguïté. Cela est d'ailleurs parfois le plus difficile à établir, en particulier sur les espaces vectoriels de dimension infinie.

- **Homogénéité :** soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et X un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, que l'on décompose dans la base β sous la forme $\mathrm{X} = \sum\limits_{k=1}^{d} x_k \beta_k$. On a alors naturellement la décomposition dans cette base de $\lambda\,\mathrm{X} = \sum\limits_{k=1}^{d} (\lambda x_k)\beta_k$, ce qui permet d'écrire le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda \mathrm{X}) &= \operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant d} |\lambda\, x_k| \\ &= \operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant d} |\lambda|\,|x_k| \\ &= |\lambda| \operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k| \\ \mathcal{N}(\lambda \mathrm{X}) &= |\lambda|\,\mathcal{N}(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{N}$ est homogène.

- **Inégalité triangulaire :** soient $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{d} x_k \beta_k$ et $\mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{d} y_k \beta_k$ deux éléments de $\mathcal{M}$ (décomposés dans la base β). La décomposition dans cette base β de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ est alors $\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \sum_{k=1}^{d} (x_k + y_k)\beta_k$. L'inégalité triangulaire vérifiée par la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ justifie le calcul suivant. Pour $k \in [\![1\,;\,d]\!]$, on a

$$|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \mathcal{N}(\mathrm{X}) + \mathcal{N}(\mathrm{Y})$$

  En prenant le maximum sur les k, il vient : $\mathcal{N}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) \leqslant \mathcal{N}(\mathrm{X}) + \mathcal{N}(\mathrm{Y})$; ainsi, $\mathcal{N}$ vérifie l'inégalité triangulaire.

- **Séparation :** soit $\mathrm{X} = \sum_{k=1}^{d} x_k \beta_k \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{N}(\mathrm{X}) = 0$. Cela signifie que $\operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k| = 0$, c'est-à-dire que pour tout k, $x_k = 0$, et donc $\mathrm{X} = 0$. Ainsi, $\mathcal{N}$ sépare bien les vecteurs de $\mathcal{M}$.

En conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\mathcal{N} \text{ est une norme sur } \mathcal{M}.}$$

2.b L'application $\mathrm{M} \in \mathcal{M} \mapsto \|\mathrm{M}\|$ est la restriction d'une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}$. Il s'agit donc d'une autre norme sur $\mathcal{M}$. Le sous-espace de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{M}$ est dimension finie d. Or, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Il s'agit donc simplement d'une application directe de ce résultat à l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ et aux normes $\mathcal{N}$ et $\|\ \|$.

$$\boxed{\exists a, b > 0 \quad \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M} \qquad a\|\mathrm{M}\| \leqslant \mathcal{N}(\mathrm{M}) \leqslant b\|\mathrm{N}\|}$$

2.c L'équivalence des normes $\mathcal{N}$ et $\|\ \|$ implique en particulier qu'une suite M_n d'éléments de $\mathcal{M}$ tend vers 0 pour l'une des normes si et seulement si elle tend vers 0 pour l'autre norme. Ainsi, on a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\|\ \|)} 0 &\iff \|\mathrm{M}_p\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \\
&\iff \mathcal{N}(\mathrm{M}_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \\
\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\|\ \|)} 0 &\iff \operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant d} |x_p(k)| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

La famille des indices k étant finie, on en déduit

$$\boxed{\mathrm{M}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\|\ \|)} 0 \iff \forall k \in [\![1\,;\,d]\!] \qquad x_p(k) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$$