Centrale Informatique MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Samuel Mimram (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-Baptiste Rouquier (ENS Lyon) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Le premier est un problème d'algorithmique qui propose d'étudier deux façons d'affecter des candidats à des écoles en privilégiant soit les candidats, soit les écoles. Les listes des choix des candidats peuvent être représentées par des graphes. L'énoncé est en grande partie constitué de définitions et de notations et ne requiert pratiquement aucune connaissance préalable sur les graphes pour pouvoir être traité – en contrepartie, il ne fait pas réviser beaucoup de notions du programme. Il est demandé au candidat de proposer des algorithmes pour trouver des affectations méritoires (c'est-à-dire « justes » d'un certain point de vue) puis de les exécuter sur un exemple. Les parties I.E et I.F sont très similaires. Les questions demandent de la rigueur et sont parfois un peu techniques, mais elles restent conceptuellement simples.

Le second problème introduit les notions de résidu et de dérivée d'une formule booléenne, cette dernière étant une généralisation aux formules booléennes de la notion habituelle de dérivée d'une fonction. Le sujet amène à manipuler des tables de vérité et quelques identités classiques (lois de De Morgan), faisant intervenir des opérateurs booléens usuels, pour montrer des propriétés de la dérivée booléenne. La difficulté des questions est variable, et le choix de la méthode à employer est parfois délicat. Cette épreuve constitue une bonne révision des outils disponibles pour traiter les problèmes de logique booléenne.

Indications

I.D.2 Trouver un contre-exemple avec deux élèves et deux écoles.

I.E.1 Montrer qu'un nœud inutile pour les écoles ne fait jamais partie d'une affectation méritoire en raisonnant par l'absurde.

I.E.2 Itérer une procédure qui « enlève des nœuds inutiles pour les écoles » jusqu'à atteindre un point fixe.

I.F.1 Formaliser l'idée intuitive suivante : si un candidat est classé parmi les N_j premiers dans une école E_j alors il est sûr d'être pris dans cette école, ou dans une école qu'il préfère à E_j.

I.F.2 Raisonner par l'absurde sur le même modèle qu'à la question I.E.1.

I.F.3 Trouver un algorithme fondé sur le même principe qu'à la question I.E.2.

I.G.1 Même indication que pour la question I.F.3.

II.A.1 Dresser la table de vérité de s_1 en fonction de x_3, x_2, x_1 et x_0.

II.A.2 Dresser la table de vérité de s_0 en fonction de x_3, x_2, x_1 et x_0.

II.B.1 Démontrer que l'égalité est vraie pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ en distinguant les cas $x_i = 0$ et $x_i = 1$.

II.B.3 Utiliser la table de vérité de l'opérateur $\oplus$; $a \oplus b = 0$ si et seulement si $a = b$.

II.B.4 Utiliser l'identité $a \oplus b = \overline{a} \oplus \overline{b}$.

II.B.5 Distinguer suivant les valeurs possibles de f_{x_i}, $f_{\overline{x_i}}$, g_{x_i} et $g_{\overline{x_i}}$ en un point de $\{0,1\}^{n-1}$ donné.

II.B.6 Utiliser l'identité $a \vee b = \overline{\overline{a} \wedge \overline{b}}$ pour se ramener à la question précédente.

I. Algorithmique

La propriété (**A2**) de l'énoncé, qui rend compte du fait que sur chaque ligne le nombre de nœuds appartenant à l'affectation est au plus égal au nombre de postes ouverts par l'école correspondante, ne correspond pas à l'explication de l'énoncé. En outre, elle est syntaxiquement incorrecte.

Intuitivement, c'est l'ensemble de la propriété qui dépend de l'entier j (pour chaque j, il faut que l'école E_j ne prenne pas plus de candidats qu'elle n'offre de postes) et non pas seulement l'hypothèse (on n'a pas besoin de supposer que pour chaque école E_j il y a plus de N_j candidats – non nécessairement distincts – affectés à cette école). On pourrait donc penser qu'il suffirait de sortir la quantification universelle sur j de la parenthèse pour corriger cela :

$$\forall j \quad (\exists n > \mathrm{N}_j \quad \forall k \in [1;n] \quad \langle \mathrm{C}_{i_k}, \mathrm{E}_j \rangle \in \mathscr{A}) \Longrightarrow \exists p, q \in [1;n] \quad \begin{cases} p \neq q \\ i_p = i_q \end{cases}$$

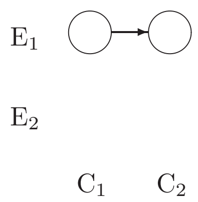
Mais c'est insuffisant car la formule reste alors syntaxiquement incorrecte : à gauche de l'implication, la définition de l'entier n par la quantification existentielle n'est valable qu'à l'intérieur de la parenthèse. On dit que la quantification existentielle est un *lieur* car elle définit une variable (n dans notre cas) et cette définition n'est valable que dans une « portion » limitée de la formule, sa *portée*. La formule est en effet de la forme $\forall j \quad \mathrm{P}(j) \Longrightarrow \mathrm{Q}(j)$, où P et Q sont des formules qui ne peuvent dépendre que de j car c'est la seule variable qui a été préalablement définie. Des variables peuvent être définies à l'intérieur de ces formules (c'est le cas par exemple de n à l'intérieur de P) mais elles ne peuvent que rester internes à ces formules. De plus, il serait préférable de définir explicitement les indices i_k (et il faut les définir après n car ils dépendent de cette variable). Une formulation correcte serait :

$$\forall j \quad \forall n > \mathrm{N}_j \quad \forall i_1, \ldots, i_n \quad (\forall k \in [1;n], \langle \mathrm{C}_{i_k}, \mathrm{E}_j \rangle \in \mathscr{A}) \quad \Longrightarrow \quad \exists p, q \in [1;n] \quad \begin{cases} p \neq q \\ i_p = i_q \end{cases}$$

I.D.1 Une affectation est dite méritoire si et seulement si, lorsqu'un candidat C qui a demandé une école E n'a pas été affecté à cette école, c'est que :

- soit il a été affecté à une école qu'il préfère (**M2**) ;
- soit l'école E a déjà affecté tous les postes qu'elle avait ouverts à des candidats qu'elle préférait à C (**M3**).

I.D.2 Considérons le graphe dans lequel il y a deux candidats (C_1 et C_2), deux écoles (E_1 et E_2 telles que $\mathrm{N}_1 = 1$ et $\mathrm{N}_2 = 1$), ayant pour sommets $\langle \mathrm{C}_1, \mathrm{E}_1 \rangle$ et $\langle \mathrm{C}_2, \mathrm{E}_1 \rangle$ et pour seul arc $\mathrm{P}_e(\langle \mathrm{C}_1, \mathrm{E}_1 \rangle, \langle \mathrm{C}_2, \mathrm{E}_1 \rangle)$.



> En français : les deux candidats postulent pour la même école E_1 mais pas pour l'école E_2 et l'école E_1, qui n'offre qu'une place, préfère le candidat 1.

Considérons l'affectation $\mathscr{A} = \{\langle C_1, E_1\rangle\}$. L'ensemble $\mathscr{A}$ est clairement une affectation (chaque candidat est affecté au plus une fois et chaque école ne prend pas plus de candidats qu'il n'y a de postes ouverts). De plus, elle est méritoire. En effet, $\langle C_1, E_1\rangle$ appartient à $\mathscr{A}$ et vérifie donc (**M1**) et $\langle C_2, E_1\rangle$ vérifie (**M3**) car C_1 remplit à lui seul tous les postes ouverts de E_1, il est préféré à C_2 par l'école E_1. Le candidat C_2 n'a pas postulé pour d'autre école que E_1. L'affectation $\mathscr{A}$ n'est pas totale car E_2 n'a pas attribué tous ses postes ouverts et C_2 n'a pas obtenu de poste. Ainsi,

$$\boxed{\text{Une affectation méritoire n'est pas nécessairement totale.}}$$

> Si le candidat avait également postulé à l'école E_2 par sécurité, il n'y aurait pas eu une place « gâchée ».

I.E.1 Un nœud $\langle C_i, E_j\rangle$ est dit « inutile pour les écoles » lorsqu'il existe N_j candidats dont E_j est l'école préférée (**1**) et qui sont préférés à C_i par cette école (**2**).

> La démonstration est un peu longue à rédiger mais sa structure est simple. Si un nœud $\langle C_i, E_j\rangle$ est inutile pour les écoles, alors il existe N_j autres candidatures qui sont à la fois la candidature préférée des candidats et que les écoles préfèrent à $\langle C_i, E_j\rangle$ (ces candidatures sont donc « meilleures de tout point de vue » que $\langle C_i, E_j\rangle$). Ainsi, une affectation méritoire ne contient pas $\langle C_i, E_j\rangle$.

Montrons qu'une affectation méritoire ne contient jamais de nœud inutile pour les écoles. Soit $\langle C_i, E_j\rangle$ un nœud inutile pour les écoles. Il existe N_j nœuds distincts $\langle C_{n_1}, E_j\rangle$, …, $\langle C_{n_{N_j}}, E_j\rangle$, avec $n_k \neq i$ pour tout k, vérifiant les propriétés (**1**) et (**2**). Soit $\mathscr{A}$ une affectation dont $\langle C_i, E_j\rangle$ fait partie.

Nécessairement, comme $\langle C_i, E_j\rangle$, $\langle C_{n_1}, E_j\rangle$, …, $\langle C_{n_{N_j}}, E_j\rangle$ sont des nœuds distincts, ils ne peuvent simultanément être dans $\mathscr{A}$ car (**A2**) ne serait pas vérifiée et $\mathscr{A}$ ne serait pas une affectation. Comme on a supposé que le nœud $\langle C_i, E_j\rangle$ appartient à $\mathscr{A}$, il existe nécessairement un entier k, tel que $1 \leqslant k \leqslant N_j$, et tel que le nœud $\langle C_{n_k}, E_j\rangle$ n'appartienne pas à $\mathscr{A}$ (*ie* ne vérifie pas (**M1**)).

Ce nœud vérifie par hypothèse (**1**) donc il ne vérifie pas non plus (**M2**) (E_j étant l'école préférée du candidat C_{n_k}, celui-ci ne peut pas être affecté à une école qu'il préfère).

Supposons que $\langle C_{n_k}, E_j\rangle$ vérifie (**M3**). Alors il existe N_j élèves préférés à C_{n_k} par l'école E_j affectés à des postes de E_j. Or, l'école E_j préfère C_{n_k} à C_i donc C_i ne fait pas partie de ces N_j élèves. De plus, C_i est supposé lui aussi être affecté à un poste de E_j. L'école E_j aurait donc affecté au moins $N_j + 1$ candidats à des postes alors qu'elle n'en offre que N_j. Il y a contradiction avec l'hypothèse (**A2**). Par conséquent, le nœud $\langle C_{n_k}, E_j\rangle$ ne vérifie ni (**M1**), ni (**M2**), ni (**M3**) et l'affectation $\mathscr{A}$ n'est pas méritoire. Finalement,

$$\boxed{\text{Une affectation méritoire ne contient jamais de nœud inutile pour les écoles.}}$$