X/ENS Modélisation PSI 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) ; il a été relu par Vincent Fourmond (ENS Ulm) et Jean-David Picon (École Polytechnique).

Ce sujet, qui comporte de très nombreuses questions, s'intéresse à la modélisation d'un moteur ionique pour satellites. Il est divisé en cinq grandes parties précédées d'une courte introduction :

- Les questions introductives constituent un exercice classique de mécanique portant sur la propulsion d'une fusée.
- La première partie étudie l'action des champs électrique et magnétique sur le système et démontre en particulier comment la présence d'un champ magnétique permet d'augmenter le taux d'ionisation.
- La deuxième donne une première approche simplifiée du problème en régime stationnaire. On y définit les notations utiles pour la suite, ainsi que la notion de gaz parfait électronique.
- La troisième améliore le modèle du régime stationnaire. Des considérations énergétiques permettent de dériver des relations supplémentaires et d'obtenir une modélisation plus proche de la réalité.
- La quatrième se concentre sur la résolution des équations établies à la troisième partie dans la région de pré-ionisation, où l'on peut négliger le taux de formation d'ions. Elle nécessite d'avoir bien en tête les deux parties précédentes.
- Enfin, la cinquième partie est complètement indépendante des autres au niveau conceptuel et propose une étude rapide et très simple des oscillations dans les plasmas.

De nombreuses questions constituent des applications directes soit du cours, soit des formules données par l'énoncé. Cela en fait un sujet abordable par tous. Les questions introductives ainsi que les parties I et V sont faciles et permettent de réviser respectivement la propulsion des fusées, les effets des champs électrique et magnétique sur des électrons et les instabilités oscillatoires dans les plasmas. En revanche, il est nécessaire d'avoir une idée précise du système et de son fonctionnement pour aborder sereinement les parties II, III et IV, qui constituent le cœur du problème. Celles-ci sont plus particulièrement axées sur les problèmes liés aux bilans de matière ou d'énergie, aux implications des hypothèses d'un modèle et aux résolutions asymptotiques dans certaines régions.

Indications

I.1 Le champ est uniforme si la distance d'action est négligeable devant la courbure.

I.2.b Est-on bien dans un cadre non relativiste ?

I.4.f L'accélération convective en $u_y \dfrac{\partial}{\partial y}$ est de l'ordre de u_y/r_1, ce qui **n'est pas** négligeable.

I.5.c Supposer que l'énergie de l'électron est entièrement absorbée dans le choc. En outre, noter que pour $\omega_\mathrm{e}\,\tau_\mathrm{e} \gg 1$,

$$\left\langle \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\omega_\mathrm{e}\,\tau_\mathrm{e}} \right\rangle = 0$$

II.1.c Écrire une équation-bilan chimique et utiliser les connaissances correspondantes.

II.4.b Chercher où $\mathrm{S}(x)$ est presque nulle.

II.5.b Penser à la théorie cinétique des gaz : que manque-t-il pour avoir un vrai gaz parfait ?

III.1.b Penser à l'accélération particulaire des ions.

III.2.f Si le choc n'aboutit pas à une ionisation, l'énergie peut être rayonnée par le xénon.

III.3.b Le terme de gauche correspond à la variation d'énergie interne à laquelle on soustrait le travail des forces de pression.

Considérer une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$ en x à l'instant initial, évoluant en une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x + \left[u_x(x+\mathrm{d}x) - u_x(x)\right]\mathrm{d}t$ en $x + u_x\,\mathrm{d}t$ à l'instant final.

III.4.a Estimer que $5/3$ n'est pas très différent de 3.

III.5.b Regarder le potentiel et considérer que les chocs sont plus fréquents à mesure que le champ magnétique augmente.

IV.1.a Lire le préliminaire de la question IV.3 pour trouver l'approximation.

Intégrer entre x_B et x.

IV.1.b Isoler le membre de gauche et utiliser toutes les autres équations (y compris intégrales) écrites précédemment pour mettre le membre de droite sous la bonne forme, en introduisant $\mathrm{T_{eB}}$ puis v_iB.

IV.1.d Trouver d'abord le terme en $\left(1 - \dfrac{1}{\widetilde{v}_\mathrm{i}}\right)\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{v}_\mathrm{i}}{\mathrm{d}x}$ puis mettre tout ce qui reste à droite dans la définition de x_c.

IV.2 Développer d'abord en $\dfrac{1}{1+\widetilde{x}}$ plutôt qu'en $\dfrac{1}{\widetilde{x}}$ pour simplifier les calculs

IV.3.f Chercher une relation très simple où intervient la densité n_n de neutres à l'anode.

Estimer ν_id au point B grâce à la valeur de ν_i0 donnée dans l'énoncé.

x_c a déjà été calculé à la question IV.1.d.

V.3 Développer calmement au premier ordre et s'attendre à des simplifications.

Introduction

1 Plaçons-nous dans le référentiel galiléen géocentrique par rapport auquel on mesure la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la fusée.

La fusée n'a pas une masse fixe puisqu'elle éjecte constamment de la matière : c'est, par essence, un système ouvert. Comme les principes de physique s'appliquent à des systèmes fermés, on définit le système fermé coïncidant $\mathscr{S}^*$ qui est composé :

- à l'instant t de la fusée de masse $\mathrm{M}(t)$;
- à l'instant $t + \mathrm{d}t$ de la fusée de masse $\mathrm{M} + \mathrm{dM}$ et de la matière éjectée $(-\mathrm{dM})$ entre t et $t + \mathrm{d}t$.

Remarquons dès à présent que la vitesse d'éjection de la matière se fait à la vitesse $\overrightarrow{u}$ par rapport au moteur, c'est-à-dire à la vitesse $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dans le référentiel galiléen dans lequel est évaluée $\overrightarrow{v}$.

$\mathscr{S}^*$ est un système fermé. Soit $\overrightarrow{\mathrm{P}}^*$ sa quantité de mouvement. La relation fondamentale de la dynamique donne

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{P}}^*}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}}$$

La variation de quantité de mouvement pour ce système s'écrit, au premier ordre,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{P}}^* &= \overrightarrow{\mathrm{P}}^*(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{P}}^*(t) \\
&= -\mathrm{dM}\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + (\mathrm{M} + \mathrm{dM})\,(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\mathrm{d}v}) - \mathrm{M}\,\overrightarrow{v} \\
\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{P}}^* &= -\mathrm{dM}\,\overrightarrow{u} + \mathrm{M}\,\overrightarrow{\mathrm{d}v}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u} + \mathrm{M}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} &= \sum \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}} \\
\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} &= \sum \overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{ext}} + \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u}
\end{aligned}$$

Si l'on isole la variation de quantité de mouvement du système ouvert constitué par la fusée, on voit qu'il est équivalent de considérer que l'éjection de matière donne lieu à une force de poussée :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u}}$$

2 On suppose ici que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires à l'axe de translation (et donc de sens contraire) : c'est le cas par exemple pour un réacteur primaire de fusée.

Toute autre force étant négligée, la projection de l'équation du mouvement donne

$$\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}t}\,(-u)$$

On sépare les variables : $$\mathrm{d}v = -u\,\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{M}}$$

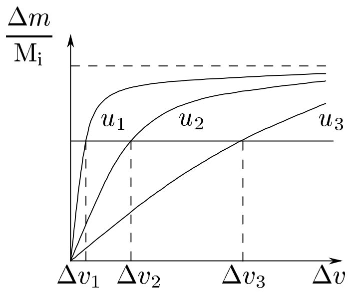
et comme u est supposée constante, on obtient, avec $\mathrm{M_f} = \mathrm{M_i} - \Delta m$,

$$\Delta v = -u\,\ln\frac{\mathrm{M_f}}{\mathrm{M_i}}$$

d'où $$\Delta v = -u\,\ln\left(1 - \frac{\Delta m}{\mathrm{M_i}}\right)$$

et on en déduit $$\boxed{\Delta m = \mathrm{M_i}\left(1 - \mathrm{e}^{-\Delta v/u}\right)}$$

3 On peut tracer l'évolution de $\Delta m/\mathrm{M_i}$ en fonction de Δv pour différentes valeurs de u ($u_1 < u_2 < u_3$).



4 Par conséquent, plus u est grand, plus on peut obtenir une grande variation de vitesse pour une même masse de carburant consommé ($\Delta v_1 < \Delta v_2 < \Delta v_3$).

5 La poussée s'exprime comme le débit que multiplie la vitesse. Un rapide calcul donne

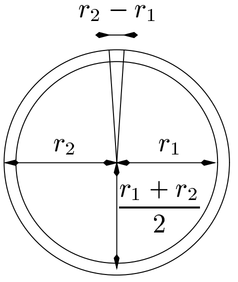
$$\boxed{\mathrm{T} = 1.10^{-2} \times 3.10^{4} = 300\ \mathrm{N}}$$

La force produite est à peine suffisante pour soulever une masse d'environ 30 kg à la surface de la Terre... Par suite, on ne peut utiliser ces moteurs que lorsque g est totalement négligeable, ou compensée par la rotation du satellite autour de la Terre. Ils ne sont pas efficaces lors du lancement ou de la mise en orbite initiale.

I. Rôle du champ magnétique sur la mobilité électronique et l'efficacité de l'ionisation

I.1 Le champ magnétique peut être supposé uniforme à condition qu'un déplacement de dr dans l'anneau du réacteur produise une variation d'orientation dθ négligeable. Il faut donc que l'on ait, en ordres de grandeur,

$$\boxed{\frac{2\,(r_2 - r_1)}{r_2 + r_1} \ll 1}$$



Avec les données fournies par l'énoncé, on remarque que l'approximation n'est pas vraiment justifiée, mais on verra à la question I.3.d qu'on n'a en fait besoin que d'une contrainte plus faible.