Mines Physique 2 PC 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Éric Armengaud (ENS Ulm) ; il a été relu par Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon) et Vincent Fourmond (ENS Ulm).

Ce problème traite du principe de l'holographie. Il s'agit d'une technique de production d'images en « trois dimensions », basée sur des phénomènes d'interférences et utilisant le laser. Il est composé de deux parties indépendantes et de longueurs inégales.

- La première partie est la plus importante. Elle mobilise toutes les connaissances acquises en optique ondulatoire, des interférences à la diffraction. Bien que proche du cours, comme l'indique l'énoncé, elle nécessite une bonne maîtrise d'ensemble de cette partie du programme. Elle permettra une révision des outils indispensables à la résolution des exercices d'interférences et de diffraction : notation complexe, fonction sinus cardinal, différences de marche, etc.
- La seconde partie permettra à ceux qui ne maîtrisent pas l'optique de se rattraper un minimum. Elle étudie essentiellement des équations de diffusion thermique. On pourra ainsi réviser la manière d'établir de telles équations, ainsi que des techniques pour les résoudre.

La difficulté principale du problème réside dans les calculs de la première partie. Beaucoup sont simples techniquement mais nécessitent d'avoir une bonne compréhension physique des phénomènes étudiés, ce qui est parfois délicat en optique ondulatoire. De plus, certaines questions, en particulier la troisième, ne sont pas toujours formulées de façon très claire. Enfin, quelques questions mènent à des résultats formels lourds. Le sujet n'est pas très long, aussi est-il important de justifier correctement ses calculs, surtout dans la première partie.

Notons pour conclure que l'holographie est un sujet assez classique en optique, qui a déjà fait l'objet de problèmes de concours et que l'on retrouve dans de nombreux livres d'exercices.

Indications

Partie I

2 Dans l'expression $\mathrm{I(M)/I_0}$, étudier l'ordre de grandeur (en fonction de ε) de chaque terme avant de développer le facteur de transmission.

3 Il faut se restreindre au calcul du champ sortant de la plaque à son voisinage immédiat. Exprimer l'amplitude de l'onde transmise en fonction de l'onde incidente et du coefficient de transmission. Développer ensuite le cosinus du coefficient de transmission en exponentielles pour faire apparaître 3 termes.

5 Utiliser le résultat de la question 4 donnant la distance entre deux lignes d'intensité maximale.

6 Utiliser le résultat de la question 2.

7 Après avoir posé l'intégrale, intégrer séparément sur les variables x et y. Utiliser l'intégrale de l'énoncé en prenant garde aux notations.

9 Se souvenir de la définition : $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

10 Quand les pics d'amplitude sont séparés, les intensités s'additionnent simplement.

13 L'intensité I(M) dont il est question dans l'énoncé est celle qui a été enregistrée à l'inscription, pas celle qui sert à la lecture. Le chemin optique d'un rayon lumineux s'écrit sous la forme $\ell = \text{indice} \times \text{distance}$.

15 S'inspirer de la question 7 en essayant de ne pas refaire tous les calculs. L'énoncé ne demande pas l'expression complète de l'intensité diffractée.

Partie II

17 Raisonner comme pour un problème de diffusion thermique classique, en appliquant la loi de Fourier, mais rajouter dans le bilan d'énergie l'absorption de puissance due au faisceau lumineux.

18 Identifier les termes en $\cos(kx)$, comme pour une série de Fourier.

20 Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles, utiliser la même décomposition du champ de température que celle proposée par l'énoncé à la question 18.

21 Pour calculer $\beta\,\mathrm{I_0}$, utiliser $\mathrm{E_0}$ et les dimensions du cylindre où est confinée l'intensité lumineuse.

I. Hologrammes minces

1 L'onde issue de l'objet et l'onde de référence proviennent de la même source initiale, et sont donc cohérentes entre elles. Au point M, l'intensité lumineuse résulte ainsi de l'interférence entre ces deux ondes, d'amplitudes respectives :

$$\begin{cases} \underline{a}(\mathrm{M},t) = \mathrm{A_{obj}}(\mathrm{M})\,\exp\left(i\left(\omega t - \psi(\mathrm{M})\right)\right) \\ \underline{a}_{\text{réf}}(\mathrm{M},t) = \mathrm{A_{réf}}\,\exp\left(i\left(\omega t - \overrightarrow{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\right) \end{cases}$$

On a donc, en utilisant la définition de l'intensité donnée par l'énoncé

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\mathrm{M}) &= (\underline{a}+\underline{a}_{\text{réf}})(\underline{a}+\underline{a}_{\text{réf}})^* \\ &= \underline{a}\,\underline{a}^* + \underline{a}_{\text{réf}}\,\underline{a}_{\text{réf}}^* + \underline{a}\,\underline{a}_{\text{réf}}^* + \underline{a}^*\,\underline{a}_{\text{réf}} \\ &= \mathrm{I_{obj}}(\mathrm{M}) + \mathrm{I_{réf}} \\ &\quad + \mathrm{A_{obj}}(\mathrm{M})\,\mathrm{A_{réf}}\,[e^{\,i\,(\omega t - \Psi - \omega t + \overrightarrow{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})} + e^{-i\,(\omega t - \Psi - \omega t + \overrightarrow{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{I}(\mathrm{M}) = \mathrm{I_{obj}}(\mathrm{M}) + \mathrm{I_{réf}} + 2\,\mathrm{A_{obj}}(\mathrm{M})\,\mathrm{A_{réf}}\,\cos\left(\Psi(\mathrm{M}) - \overrightarrow{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)}$$

> Ce calcul est le développement des interférences à deux ondes vu en cours. Il faut absolument savoir faire la distinction entre amplitude (grandeur complexe) et intensité. On additionne deux amplitudes lumineuses quand elles sont cohérentes, ce qui est le cas ici. L'intensité lumineuse est ensuite obtenue en prenant le module carré de l'amplitude ; c'est la grandeur physique mesurée par un détecteur. Si les deux ondes n'étaient pas cohérentes entre elles (par exemple issues de deux sources distinctes), il faudrait alors simplement additionner leurs intensités.

2 Développons le quotient

$$\frac{\mathrm{I}(\mathrm{M})}{\mathrm{I_0}} = 1 + \frac{\mathrm{I_{obj}}}{\mathrm{I_{réf}}} + 2\,\frac{\mathrm{A_{obj}}}{\mathrm{A_{réf}}}\,\cos(\Psi(\mathrm{M}) - \overrightarrow{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})$$

Le deuxième terme est $\qquad \mathrm{I_{obj}}/\mathrm{I_{réf}} \sim (\mathrm{A_{obj}}/\mathrm{A_{réf}})^2 \sim \varepsilon^2$

Le dernier terme est, lui, proportionnel à ε. Comme on se restreint à l'ordre 1 en ε, il vient

$$t \approx t_0\,[1 + 2\,\frac{\mathrm{A_{obj}}(\mathrm{M})}{\mathrm{A_{réf}}}\,\cos(\Psi(\mathrm{M}) - \overrightarrow{k}_{\text{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})]^{-\gamma/2}$$

On développe cette expression en utilisant la formule $(1+\varepsilon)^a \approx 1 + a\,\varepsilon$, valable au premier ordre. On explicite ensuite $\mathrm{M}(x,y,0)$ et $\overrightarrow{k}_{\text{réf}} = k_{\text{réf}}\,(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$ et on effectue le produit scalaire :

$$\boxed{t(x,y,0) = t_0\left(1 - \gamma\,\frac{\mathrm{A_{obj}}(\mathrm{M})}{\mathrm{A_{réf}}}\,\cos\left(\Psi(x,y,0) - k_{\text{réf}}\,x\,\sin\varphi\right)\right)}$$

3 Le calcul complet du champ dans tout l'espace est très complexe et n'est pas attendu ici. En revanche, on peut faire le calcul dans un voisinage immédiat de la plaque sans difficulté. Il s'agit alors de calculer l'amplitude transmise en un point $\mathrm{M}(x,y,0)$ de la plaque.

En tenant compte du facteur multiplicatif t à la traversée de la plaque, il vient

$$\mathrm{A(M)} = t(x,y,0)\,\mathrm{A_{réf}}\,e^{\,i(\omega t-\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})}$$

Réécrivons l'expression de $t(x,y,0)$ grâce à la relation obtenue à la question précédente, en développant le cosinus en somme d'exponentielles et en utilisant le fait que $k_{\mathrm{réf}}\,x\,\sin\varphi = \overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{A(M)} = t_0\,\mathrm{A_{réf}}\,e^{\,i(\omega t-\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})} \times \Bigg[1 &- \frac{\gamma}{2}\,\frac{\mathrm{A_{obj}}}{\mathrm{A_{réf}}}\,e^{\,i(\Psi(x,y,0)-\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})}\\ &-\frac{\gamma}{2}\,\frac{\mathrm{A_{obj}}}{\mathrm{A_{réf}}}\,e^{-i(\Psi(x,y,0)-\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}})}\Bigg]\end{aligned}$$

On écrit A sous la forme d'une somme de trois termes $\mathrm{A} = a_1+a_2+a_3$, avec $a_n = \mathrm{A}_n\,\exp[i(\omega t-\varphi_n)]$. En rassemblant les phases dans les exponentielles, il vient

- Pour le premier terme

$$\boxed{\mathrm{A}_1 = t_0\,\mathrm{A_{réf}} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

  C'est l'onde issue directement du faisceau de lecture.

- Pour le second terme

$$\boxed{\mathrm{A}_2 = -t_0\,\gamma\,\mathrm{A_{obj}}/2 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = 2\,\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \Psi(\mathrm{M})}$$

  Cette onde a une phase opposée à celle de l'objet à cause du signe « $-$ » devant $\Psi(\mathrm{M})$.

- Pour le dernier terme

$$\boxed{\mathrm{A}_3 = -t_0\,\gamma\,\mathrm{A_{obj}}/2 \quad \text{et} \quad \varphi_3 = \Psi(\mathrm{M})}$$

  Il s'agit de l'onde semblable à celle issue de l'objet. La phase de l'objet Ψ est directement reproduite, mais l'amplitude est bien sûr modifiée.

> En fait, le raisonnement fait ici est heuristique. Ce calcul n'est valable que pour un point M au voisinage immédiat de la plaque ; au-delà les effets de propagation nécessiteraient un calcul compliqué, non demandé et de surcroît hors-programme.

4 Partons de l'expression obtenue pour $\mathrm{I(M)}/\mathrm{I}_0$ à la question 2, après développement à l'ordre 1 en ε.

$$\begin{aligned}\mathrm{I(M)} &= \mathrm{I}_0\left(1+2\,\frac{\mathrm{A_{obj}}}{\mathrm{A_{réf}}}\,\cos\left[\psi(\mathrm{M})-\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right]\right)\\ &= \mathrm{I}_0\,(1+2\,\varepsilon\,\cos\left[(\overrightarrow{k}_{\mathrm{obj}}-\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{I(M)} = \mathrm{I}_0\,[1+m\,\cos(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\Delta k})] \quad \text{où} \quad m = 2\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Delta k} = \overrightarrow{k}_{\mathrm{obj}}-\overrightarrow{k}_{\mathrm{réf}}}$$

Pour étudier les lignes d'intensité maximale sur l'hologramme, on doit chercher les points $\mathrm{M}(x,y,0)$ tels que

$$\cos(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\Delta k}) = 1$$

soit
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\Delta k} = 2\pi\,n \qquad n\in\mathbb{Z}$$