Mines Physique 2 MP 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antonin Ferri (ENS Ulm) ; il a été relu par Pierre-Marie Billangeon (École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles) et Jean-David Picon (École Polytechnique).

Ce sujet est consacré à l'étude d'un « paradoxe » : lorsqu'un condensateur se décharge dans un circuit ne comportant pas d'éléments dissipatifs, on ne retrouve pas la totalité de l'énergie initiale une fois l'équilibre atteint – ce qui semble violer la loi de conservation de l'énergie. Nous verrons que c'est en fait l'approximation quasi-stationnaire qu'il faut ici remettre en question.

- Dans la première partie, on met en évidence le phénomène dans un circuit très simple.
- Dans la deuxième, le circuit est modélisé par une boucle de courant (dipôle magnétique) et l'on cherche à déterminer l'expression des pertes d'énergie par rayonnement. C'est la partie la plus calculatoire du problème mais l'énoncé nous guide pas à pas.
- La troisième fournit l'occasion d'utiliser le résultat obtenu dans la partie précédente : on modélise les pertes par rayonnement en introduisant un dipôle dissipatif dans le circuit initial et on étudie son comportement.
- La quatrième propose l'étude d'un circuit RLC ; on met en évidence deux régimes de fonctionnement selon que le rayonnement est négligeable ou non.
- Enfin, la cinquième partie est une discussion qualitative portant sur les différentes constantes de temps intervenant dans le problème.

Ce sujet, de difficulté moyenne, permet de faire le point sur les phénomènes de rayonnement. Il requiert quelques notions d'électrocinétique et constitue une bonne occasion de réviser les calculs du dipôle rayonnant.

Indications

2 Écrire la conservation de la charge.

4 À l'équilibre, $i = 0$.

5 Pour éviter toute erreur de signe, utiliser la remarque faite à la question 1 ; se méfier des réponses « intuitives » à la question sur la dépendance en R de l'énergie dissipée.

7 Comparer le temps caractéristique de variation du courant au temps de propagation de l'information dans le circuit.

8 Utiliser les symétries de la distribution de courant pour déduire la forme du potentiel vecteur. Faire un dessin pour visualiser l'angle $\widehat{(\overrightarrow{u'}(\mathrm{M}), \overrightarrow{u_\varphi})}$

9 Ne pas confondre le développement de $1/\mathrm{MP}$ et celui de MP donné par l'énoncé.

10 Ne pas se laisser impressionner par l'expression générale du rotationnel, qui se simplifie beaucoup ici, et ne pas oublier que l'on s'intéresse uniquement au premier ordre en a/r. En dérivant l'expression obtenue, se souvenir que $u = t - r/c$.

12 Le vecteur de Poyting $\overrightarrow{\Pi}$ est la densité de flux d'énergie électromagnétique : il est homogène à une énergie par unité de surface et par unité de temps. Pour obtenir la puissance totale rayonnée, il suffit donc calculer son flux à travers la sphère de centre O passant par P.

13 On supposera une loi sinusoïdale sur l'intensité et on introduira le moment dipolaire magnétique de la spire, $m_0 = i_0 \sigma$.

14 Exprimer la puissance rayonnée en fonction de $\mathrm{V_X}$, de deux manières différentes.

16 Retrouve-t-on, pour $t = +\infty$, l'équilibre caractérisé dans la partie I ?

18 Cette question est très semblable à la question 14.

19 Où peut-on faire apparaître le terme $\mathrm{K}q^4$ dans l'équation (**3**) ?

22 Évaluer l'ordre de grandeur de la puissance rayonnée $\mathrm{P_{ray}}$ en fonction du paramètre α.

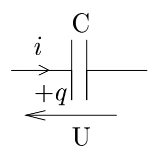
23 Comparer τ_M et τ_RC ; lequel contrôle les variations du courant dans le circuit, et pourquoi ?

I. Circuit de deux condensateurs, régime quasi-stationnaire

1 L'expression de l'énergie d'un condensateur de capacité C en fonction de sa charge q est $\mathrm{E} = q^2/2\,\mathrm{C}$. Par extensivité, l'énergie contenue dans le circuit est la somme des énergies contenues dans chaque condensateur. L'énergie initialement emmagasinée dans le circuit est donc

$$\boxed{\mathrm{W_i} = \frac{{q_{10}}^2}{2\,\mathrm{C_1}}}$$

> Rappelons les conventions de signes concernant les condensateurs : avec l'orientation indiquée ci-dessous (et elle seule) on a $q = \mathrm{C\,U}$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

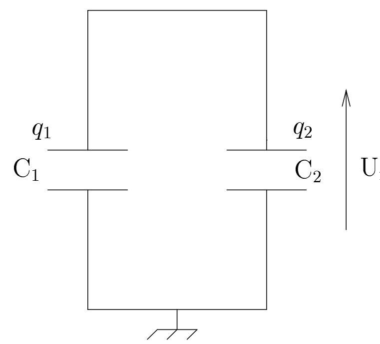


2 Notons q_1 et q_2 les charges des condensateurs $\mathrm{C_1}$ et $\mathrm{C_2}$ à l'équilibre. Par définition, la tension d'équilibre $\mathrm{U_f}$ est identique aux bornes des deux condensateurs.

On a donc $q_1 = \mathrm{C_1 U_f}$ et $q_2 = \mathrm{C_2 U_f}$; de plus, la conservation de la charge implique $q_{10} = q_1 + q_2$.

La tension d'équilibre est donc

$$\boxed{\mathrm{U_f} = \frac{q_{10}}{\mathrm{C_1 + C_2}}}$$



3 L'énergie stockée dans le circuit à l'équilibre est $\mathrm{W_f} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{C_1 {U_f}^2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{C_2 {U_f}^2}$

soit

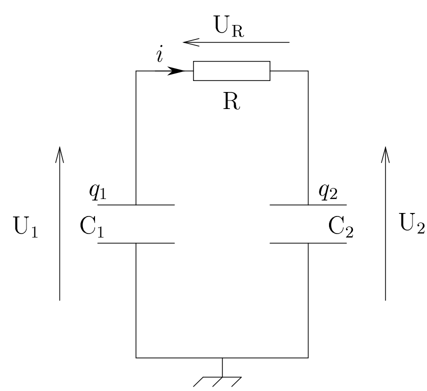
$$\boxed{\mathrm{W_f} = \frac{{q_{10}}^2}{2(\mathrm{C_1 + C_2})}}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{W_f - W_i} = -\frac{{q_{10}}^2}{2(\mathrm{C_1 + C_2})}\,\frac{\mathrm{C_2}}{\mathrm{C_1}}}$$

Ainsi, $\mathrm{W_f - W_i} < 0$ alors qu'aucun élément dissipatif n'est présent dans le circuit, ce qui est inquiétant !

4 Tenons compte cette fois de la résistance des fils du circuit, modélisée par l'introduction de R. À l'équilibre, l'intensité i dans le circuit est nulle par définition ; par conséquent $\mathrm{U_R} = \mathrm{R}\,i = 0$. De plus, la présence de R ne modifie pas l'équation de conservation de la charge. On retrouve donc les mêmes valeurs pour $\mathrm{U_f}$ et $\mathrm{W_f}$ qu'à la question précédente.



5 La loi des mailles donne $$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_\mathrm{R} + \mathrm{U}_2$$

soit $$\frac{q_1}{\mathrm{C}_1} = \mathrm{R}\,i + \frac{q_2}{\mathrm{C}_2}$$

donc $$\frac{q_1}{\mathrm{C}_1} = -\mathrm{R}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{q_{10} - q_1}{\mathrm{C}_2}$$

d'où l'équation différentielle vérifiée par $q_1(t)$ pendant la décharge du condensateur :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{q_1}{\tau} = \frac{q_{10}}{\mathrm{R}\,\mathrm{C}_2} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \mathrm{R}\,\frac{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2} \text{ et } q_1(0) = q_{10}}$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre est la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre, que l'on peut ici choisir constante. On a donc

$$q_1(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{\tau}{\mathrm{R}\,\mathrm{C}_2}\,q_{10} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

et en utilisant la condition initiale, il vient

$$q_1(t) = \frac{q_{10}}{\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2}\left(\mathrm{C}_2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{C}_1\right)$$

d'où l'expression du courant i dans le circuit :

$$\boxed{i(t) = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \frac{q_{10}}{\mathrm{R}\,\mathrm{C}_1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Pendant le temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, la résistance dissipe l'énergie $\delta\mathrm{Q} = \mathrm{R}\,i^2(t)\ \mathrm{d}t$. Ainsi, l'énergie totale dissipée par effet Joule au cours de la décharge du condensateur s'écrit

$$\mathrm{Q} = \int_0^{+\infty} \mathrm{R}\,i^2(t)\ \mathrm{d}t = \frac{{q_{10}}^2}{\mathrm{R}\,{\mathrm{C}_1}^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t/\tau}\ \mathrm{d}t$$

Par conséquent, $$\boxed{\mathrm{Q} = \frac{{q_{10}}^2}{2(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2)}\,\frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1}}$$

> Tout d'abord, constatons que l'énergie dissipée ne dépend pas de R, ce qui n'a rien d'évident a priori puisque l'effet Joule est justement conditionné par l'existence d'une résistance dans le circuit. Ici, l'augmentation de R entraîne une « diminution » de i et on constate qu'au final ces deux effets opposés se compensent.
>
> On peut également faire le rapprochement avec l'énergie manquante calculée à la question précédente : on retrouve $\mathrm{W_f} - \mathrm{W_i} = -\mathrm{Q}$; ainsi, la prise en compte de la résistance des fils permet d'expliquer le phénomène. Pourtant, cela ne résout pas vraiment le problème initial, puisque l'effet existe même dans un circuit ne comportant aucune résistance. Il faut donc chercher ailleurs !