Centrale Physique MP 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémy Hervé (ENS Lyon) ; il a été relu par Vincent Fourmond (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet étudie l'effet de serre induit par le CO_2 atmosphérique et le réchauffement climatique qui s'ensuit. Il étudie également la possibilité de réduire la pollution due au CO_2 en le stockant au fond des océans.

La première partie propose une analyse des interactions d'une molécule de dioxyde de carbone libre avec une onde électromagnétique par l'intermédiaire de ses modes de vibration. On y utilise essentiellement l'étude d'oscillateurs harmoniques couplés, en régime libre et forcé, ainsi que des notions d'électromagnétisme.

La deuxième se consacre à l'effet de serre en lui-même, en utilisant des modélisations de plus en plus fines qui reposent sur les propriétés d'un corps noir et sur des équilibres radiatifs.

Enfin, la troisième partie étudie la possibilité de stocker le CO_2 sous forme de torpilles solides déposées au fond des océans. Elle allie des bases de mécanique du point et de mécanique des fluides à la thermodynamique des changements d'état.

Les deuxième et troisième parties requièrent une bonne maîtrise technique du cours, mais peu d'efforts d'adaptation, ce qui en fait des parties de difficulté tout à fait raisonnable.

La première partie, en revanche, utilise des outils usuels dans un cadre plus inhabituel. Cela en fait la partie la plus difficile et suppose une bonne maîtrise conceptuelle, en plus de la maîtrise technique du cours.

Enfin, l'ensemble est d'une longueur permettant de terminer le sujet dans les temps, si l'on ne reste pas bloqué sur une question.

Ce sujet est l'occasion d'étudier et de discuter une modélisation d'un phénomène complexe, souvent cité mais rarement compris.

Indications

Partie I

I.A.2.b Utiliser la relation de la question I.A.2.a afin d'éliminer x_2.

I.A.2.e Pour trouver les relations entre les A_i, penser à utiliser la relation démontrée à la question I.A.2.a.

I.B.1 Faire l'analogie avec un pendule de torsion.

I.B.2.a Par définition du barycentre, pour un point M quelconque, on a

$$m_1\overrightarrow{\mathrm{MO}}_1 + m_2\overrightarrow{\mathrm{MC}} + m_1\overrightarrow{\mathrm{MO}}_2 = (2\,m_1 + m_2)\,\overrightarrow{\mathrm{MG}}$$

Attention aux signes en projetant !

I.C.1 Penser à la relation entre les amplitudes des champs électrique et magnétique pour une onde électromagnétique dans le vide.

I.C.4.c Faire un bilan de puissance entre z et $z + \mathrm{d}z$.

Partie II

II.A.1.b Utiliser les données pour déterminer la constante dans la loi de déplacement de Wien.

II.B.2 Les relations de la question précédente permettent de définir une suite récurrente du second ordre. Les solutions sont de la forme $\alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n$ si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, et de la forme $(\alpha + \beta\, n)\, {r_0}^n$ si elle a une racine double r_0.

II.C.1.a Utiliser la définition d'une concentration.

Partie III

III.A.2 Penser que la torpille a dû être refroidie à une température inférieure à 195 K pour être solide sous une pression de 1 bar.

III.A.3.a Le rayon de la torpille diminue, donc $\mathrm{d}r < 0$.

III.B.1 N'utiliser le principe fondamental de la dynamique que sur un système fermé !

III.B.2 La masse de la torpille à l'instant t est directement liée à son volume.
La force d'Archimède s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{F}_a} = -\pi\, r^2\, h\, \rho_0\, \overrightarrow{g}$$

III.C.1 Intégrer la loi de vitesse pour obtenir la loi de position et penser que le terme en exponentielle doit être négligeable.

I. Vibrations de la molécule de CO_2 et interaction avec une onde électromagnétique

A. Vibrations longitudinales de la molécule

I.A.1 On définit le référentiel barycentrique d'un système comme le référentiel attaché à son centre d'inertie et en translation par rapport à tout référentiel galiléen.

> Un référentiel est l'association d'un repère d'espace et d'une horloge (repère de temps). Un référentiel ne possède ni point ni direction privilégiés. Plusieurs repères sont possibles pour un même référentiel, et c'est pourquoi cela n'a pas de sens de dire qu'un référentiel est centré en un point.
>
> On dira d'un référentiel (B) qu'il est en translation par rapport à un référentiel (A) si un solide immobile dans (B) apparaît animé d'un mouvement de translation dans (A).
>
> On peut également dire qu'un référentiel (B) est en translation par rapport à un référentiel (A) si tous les points immobiles dans (B) apparaissent animés du même mouvement dans (A). Ainsi, dès lors que deux référentiels sont identifiés comme étant en translation l'un par rapport à l'autre, l'étude du mouvement d'un point fixe de l'un d'eux dans l'autre suffit à caractériser le mouvement relatif des deux référentiels.

Un référentiel est galiléen s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen. Le référentiel barycentrique étant en translation par rapport à tout référentiel galiléen, il sera galiléen si au moins l'un de ses points fixes est animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.

Soit G le centre d'inertie de la molécule. La molécule étant supposée isolée, si on lui applique le théorème du centre d'inertie dans un référentiel galiléen, on obtient

$$(2\,m_1 + m_2)\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{V}_\mathrm{G}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$$

Le point G, immobile dans le référentiel barycentrique, est donc affecté d'un mouvement rectiligne uniforme dans tout référentiel galiléen. On en déduit que le référentiel barycentrique (B) de la molécule est galiléen.

I.A.2.a On note O_1 et O_2 les deux atomes d'oxygènes. La définition du barycentre donne la relation

$$m_1\overrightarrow{\mathrm{GO}_1} + m_2\overrightarrow{\mathrm{GC}} + m_1\overrightarrow{\mathrm{GO}_2} = \overrightarrow{0}$$

En projetant cette relation sur l'axe Gx, on obtient

$$m_1\,[(-r_0 + x_1) + (r_0 + x_3)] + m_2\,(0 + x_2) = 0$$

soit

$$\boxed{m_1\,(x_1 + x_3) + m_2\,x_2 = 0}$$

I.A.2.b L'oxygène O_1 n'est soumis qu'à la force due à l'étirement du ressort qui le lie au carbone. En lui appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel barycentrique, on obtient donc

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k\,(x_1 - x_2)$$

En utilisant la relation démontrée à la question précédente pour éliminer x_2, il vient

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -k \left(x_1 + \frac{m_1}{m_2}(x_1 + x_3) \right)$$

soit $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + a\, x_1 + b\, x_3 = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} a = k \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} \right) \\ b = \dfrac{k}{m_2} \end{cases}}$$

De même, en appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'oxygène O_2 dans le référentiel barycentrique, on trouve

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_3}{\mathrm{d}t^2} = -k(x_3 - x_2)$$

donc $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x_3}{\mathrm{d}t^2} + a\, x_3 + b\, x_1 = 0}$$

I.A.2.c Dans la notation complexe, le système d'équations différentielles précédent peut s'écrire comme un système d'équations linéaires sur les A_i :

$$\begin{cases} \left(a - \omega^2\right) \mathrm{A}_1 + b\, \mathrm{A}_3 = 0 \\ b\, \mathrm{A}_1 + \left(a - \omega^2\right) \mathrm{A}_3 = 0 \end{cases}$$

> Rappelons qu'en notation complexe, avec la convention $e^{+j\omega t}$, la dérivation par rapport au temps est équivalente à une multiplication par un facteur $j\,\omega$.

Ce système admet des solutions $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_3)$ autres que $(0, 0)$ si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a - \omega^2 & b \\ b & a - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation en ω $$\left(a - \omega^2\right)^2 - b^2 = 0$$

On reconnaît une identité remarquable qui permet de factoriser cette équation pour trouver deux solutions :

$$\begin{cases} {\omega_{\mathrm{I}}}^2 = a - b = \dfrac{k}{m_1} \\ {\omega_{\mathrm{II}}}^2 = a + b = k \left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{2}{m_2} \right) \end{cases}$$

soit $$\boxed{\omega_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \qquad \text{et} \qquad \omega_{\mathrm{II}} = \sqrt{k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2} \right)}}$$

I.A.2.d *Application numérique* :

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_{\mathrm{I}} &= 2,31\,.\,10^{14}\ \mathrm{rad.s^{-1}} \\ \omega_{\mathrm{II}} &= 4,43\,.\,10^{14}\ \mathrm{rad.s^{-1}} \end{aligned}}$$