CCP Maths 1 MP 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Moez Ajmi (École Polytechnique) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Ce sujet étudie le polynôme de meilleure approximation au sens de Tchebychev. Le but est de montrer l'existence d'un tel polynôme pour une fonction continue donnée, sans s'intéresser à l'unicité.

- La première partie, très classique, traite des polynômes de Tchebychev, de leurs propriétés les plus courantes (degré, coefficient dominant), ainsi que de leurs propriétés numériques (racines, norme). On y utilise les formules de trigonométrie, ainsi que des raisonnements par récurrence.
- La deuxième étudie les propriétés algébriques des polynômes de Tchebychev (base, projection orthogonale). Les outils utilisés sont élémentaires (intégrabilité d'une fonction, série convergente).
- La dernière partie est consacrée aux polynômes de meilleure approximation au sens de Tchebychev (PMA). On utilise un peu de topologie élémentaire (notion de compact) ainsi que des résultats de la première partie. Il s'agit de déterminer une méthode permettant de calculer le PMA d'ordre n d'une fonction polynomiale de degré $n+1$.

Dans l'ensemble, ce sujet est assez classique et d'une difficulté moyenne.

Indications

I. Polynômes de Tchebychev

2.a Utiliser l'égalité

$$\forall p, q \in \mathbb{R} \quad \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2.c Raisonner par récurrence.

3.a Déterminer les racines de T_n et utiliser la décomposition en facteurs premiers d'un polynôme (remarquer que T_n est scindé).

3.b Utiliser la définition de T_n.

II. Polynômes de Tchebychev et orthogonalité

4 Majorer l'application $t \mapsto \dfrac{h(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ par une application intégrable sur $]-1\,;1\,[$.

5.a Ne pas oublier de démontrer que $h(1) = h(-1) = 0$.

6 Faire le changement de variable $t = \cos\theta$.

7.a Remarquer que $t_n(f)$ n'est autre que la projection orthogonale de f sur E_n.

8 Utiliser le théorème de Pythagore.

9.b Le terme général d'une série convergente tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

10.a Utiliser le fait que $\forall t \in\,]-1\,;1\,[\quad \dfrac{h^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \dfrac{\|h\|_\infty^2}{\sqrt{1-t^2}}$ et passer à l'intégrale.

11.b Utiliser la question 11.a.

III. PMA au sens de Tchebychev

13.a Raisonner par l'absurde.

13.b Utiliser la continuité de l'application $\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{E}_n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{Q} \longmapsto \|f-\mathrm{Q}\|_\infty \end{cases}$

15.b Considérer le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q}$, de degré n, et montrer qu'il admet $n+1$ racines en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

16 Utiliser les questions 14.b et 15.

17 Remarquer qu'un polynôme P unitaire et de degré $n+1$ s'écrit sous la forme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n+1} - \mathrm{Q}(\mathrm{X})$, où Q est un polynôme de degré n.

18.a S'inspirer de la question 16.

I. Polynômes de Tchebychev

1.a La formule de Moivre donne

$$\begin{aligned}
\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\,(\exp(in\theta)) = \mathrm{Re}\,[(\cos\theta + i\sin\theta)^n] \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta) i^k \sin^k(\theta)\right) \\
\cos(n\theta) &= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)(-1)^k(1-\cos^2(\theta))^k
\end{aligned}$$

On pose
$$\boxed{\mathrm{T}_n(x) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k}$$

T_n est bien un polynôme à coefficients réels, et vérifiant la propriété

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Il reste à montrer que le polynôme T_n est de degré n :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(x) &= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k \\
&= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} \left(\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} x^{2l}\right) \\
\mathrm{T}_n(x) &= \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k+l} \binom{n}{2k} \binom{k}{l} x^{n-2k+2l}
\end{aligned}$$

Le terme de plus haut degré de T_n est obtenu pour $k = l$:

$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^{2k} \binom{n}{2k} \binom{k}{k} x^n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} x^n$$

Comme le coefficient du terme de plus haut degré de T_n est non nul (c'est une somme d'entiers strictement positifs), on en déduit que T_n est de degré n.

> Un polynôme de la forme $a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$ n'est pas forcément de degré n ; il faut vérifier que le terme de plus haut degré, a_n, est non nul.

1.b Supposons qu'il existe un autre polynôme R_n vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_n \qquad \mathrm{R}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = \mathrm{T}_n(\cos\theta)$$

Comme $x = \cos\theta$ décrit $[\,-1\,;1\,]$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \mathrm{R}_n(x) = \mathrm{T}_n(x) \quad \text{soit} \quad (\mathrm{R}_n - \mathrm{T}_n)(x) = 0$$

Le polynôme $\mathrm{R}_n - \mathrm{T}_n$ admettant une infinité de racines, il s'agit du polynôme nul, d'où $\mathrm{R}_n = \mathrm{T}_n$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Il y a un unique polynôme vérifiant la relation } (*).}$$

2.a Utilisons l'égalité suivante, qui découle directement de la définition du polynôme T_n :

$$\forall x \in [-1\,;1] \qquad \mathrm{T}_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x) \tag{1}$$

et appliquons la formule d'addition des cosinus :

$$\forall p, q \in \mathbb{R} \qquad \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Pour $x \in [-1\,;1]$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+2}(x) + \mathrm{T}_n(x) &= \cos((n+2) \operatorname{Arccos} x) + \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) \\
&= 2 \cos((n+1) \operatorname{Arccos} x) \cos(\operatorname{Arccos} x) \\
&= 2x \cos((n+1) \operatorname{Arccos} x) \\
\mathrm{T}_{n+2}(x) + \mathrm{T}_n(x) &= 2x\, \mathrm{T}_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

d'où $$\boxed{\forall x \in [-1\,;1] \qquad \mathrm{T}_{n+2}(x) = 2x\mathrm{T}_{n+1}(x) - \mathrm{T}_n(x)}$$

> Arccos est l'application réciproque de la restriction de cos sur $[0\,;\pi]$; elle est définie sur $[-1\,;1]$.
>
> $$\forall x \in [-1\,;1] \qquad \cos[\operatorname{Arccos}(x)] = x$$

2.b D'après (**1**) on a, pour tout $x \in [-1\,;1]$,

$$\mathrm{T}_0(x) = \cos(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_1(x) = \cos(\operatorname{Arccos} x) = x$$

Grâce à la relation établie à la question précédente, il vient, pour tout $x \in [-1\,;1]$,

$$\mathrm{T}_2(x) = 2x\mathrm{T}_1(x) - \mathrm{T}_0(x) = 2x^2 - 1$$

et $$\mathrm{T}_3(x) = 2x\mathrm{T}_2(x) - \mathrm{T}_1(x) = 4x^3 - 3x$$

2.c T_0 a pour coefficient dominant 1. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1}.

- $\underline{\mathscr{P}(1) \text{ et } \mathscr{P}(2)}$ sont vraies, au vu des expressions de T_1 et T_2.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+2)}$: supposons vérifiées $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ pour $n \geqslant 1$ fixé.

  $2x\,\mathrm{T}_{n+1}$ est de degré $n+2$ et T_n de degré n, donc T_{n+2} est de degré $n+2$. Le coefficient dominant de T_{n+2} est fourni par celui de $2x\,\mathrm{T}_{n+1}$, soit le double de celui de T_{n+1}, c'est-à-dire 2^{n+1}.
- <u>Conclusion :</u> $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc montré que

$$\boxed{\mathrm{T}_n \text{ a pour coefficient dominant } 2^{n-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$$