Centrale Maths 2 PSI 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Éric Ricard (agrégé de mathématiques) ; il a été relu par Thomas Chomette (ENS Ulm) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Ce sujet a pour thème général l'approximation des fonctions $\mathcal{C}^1$ à l'aide de polynômes, soit par la méthode des splines cubiques, soit par celle de Lagrange-Sylvester.

- Dans la première partie, on s'intéresse à la résolution de systèmes linéaires tridiagonaux. Elle repose essentiellement sur des calculs du cours de Mathématiques Supérieures qui doivent être maîtrisés. Seule la dernière question est un peu plus théorique.
- La seconde partie est beaucoup plus algébrique et introduit la méthode des splines cubiques. On montre qu'elle revient à résoudre l'un des systèmes de la première partie. Les raisonnements mis en jeu mêlent algèbre linéaire et analyse des fonctions réelles (recollement essentiellement). La dernière question compare cette technique d'approximation avec celle de Lagrange-Sylvester. Cette partie est conceptuellement la plus compliquée.
- La troisième partie, indépendante des deux autres, présente une structure euclidienne sur $\mathbb{R}_n[X]$, admettant les polynômes interpolateurs de Lagrange comme base orthonormée. On y fait quelques calculs de projections avant d'étudier un endomorphisme diagonal dans cette base. Cette partie est globalement assez simple car proche des cours sur les polynômes de Lagrange et l'algèbre euclidienne.

Ce sujet est assez long et propose des calculs peu agréables. Les parties I et III sont abordables par la majorité des candidats. La seconde est plus délicate, mais traite des splines cubiques, sujet très à la mode ces dernières années qui mérite donc d'être regardé.

Indications

Partie I

I.A.2.c Introduire $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathrm{I} = [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}] \qquad f(x) \geqslant x$$

et que f laisse I stable. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge.

I.B.1 Développer C_n par rapport à la première ligne, puis par rapport à la première colonne, pour trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 satisfaite par la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Faire de même avec B_n, pour exprimer b_n en fonction de c_n et c_{n-1}, puis recommencer avec A_n.

I.B.4.a Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M} - \lambda\,\mathrm{Id}\,) = \{0\}$. Pour cela, prendre $x = (x_k)$ dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M} - \lambda\,\mathrm{Id}\,)$ et montrer que x est le vecteur nul, en considérant $|x_i|$ tel que $|x_i| = \max |x_k|$ ainsi que l'égalité provenant de la i^{e} ligne du système $(\mathrm{M} - \lambda\,\mathrm{Id}\,)x = 0$.

Partie II

II.A Construire par récurrence la fonction g sur $[0, x_k]$. Remarquer au préalable que pour a et b réels, étant donné quatre réels (p_i), il existe un unique polynôme P de degré au plus 3 tel que

$$\mathrm{P}(a) = p_1 \qquad \mathrm{P}'(a) = p_2 \qquad \mathrm{P}''(a) = p_3 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}^{(3)}(b) = p_4$$

Faire attention au recollement des fonctions.

II.B.1.a Procéder comme dans la question précédente en remarquant cette fois que pour a et b deux réels distincts, étant donné quatre réels (p_i), il existe un unique polynôme P de degré au plus 3 tel que

$$\mathrm{P}(a) = p_1 \qquad \mathrm{P}(b) = p_2 \qquad \mathrm{P}''(a) = p_3 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}''(b) = p_4$$

II.B.2 Penser au fait que g doit être $\mathcal{C}^1$ et écrire les conditions de recollement aux points x_k.

II.B.4 Considérer l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{T}\colon \mathrm{S} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+3} \\ g &\longmapsto ((g(x_i))_{0\leqslant i\leqslant n}, g'(0), g'(1)) \end{aligned}$$

Montrer que T est un isomorphisme. Pour la surjectivité, on peut montrer que l'extension de T aux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est surjective.

II.C.1 Montrer que l'application T ci-dessus définie sur $\mathbb{R}_{n+2}[x]$ est un isomorphisme. Pour l'injectivité, utiliser le théorème de Rolle pour produire $n+2$ zéros pour chaque élément du noyau.

Partie III

III.A.2 Les L_i sont les polynômes de Lagrange : regarder leurs racines.

III.A.3 Montrer que H admet une base de la forme $(c_i\mathrm{L}_i - \mathrm{L}_n)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ et exprimer l'orthogonalité de N dans cette nouvelle base.

Penser au théorème de Pythagore afin de trouver une formule pour la distance à H.

III.B.2 Montrer que L_i divise $\varphi(\mathrm{L}_i)$ et en déduire qu'ils sont proportionnels.

III.B.4 Écrire les produits scalaires dans la base (L_i).

I. Matrices tridiagonales

I.A.1 La méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire (ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres car on ne peut échanger les lignes) pour aboutir à un système triangulaire. Notons $(\mathcal{S}_2)$ sous forme matricielle. On commence par choisir le 2 en première position comme pivot ; l'étoile indique le pivot choisi.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2^* & 1 & 0 & \beta_1 \\ 1 & 4 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 1 & 2 & \beta_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \frac{1}{2}\mathrm{L}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \dfrac{7}{2}^* & 1 & -\dfrac{1}{2}\beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 1 & 2 & \beta_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \frac{7}{2}\mathrm{L}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \dfrac{7}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2}\beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & \dfrac{12}{7}^* & \dfrac{1}{7}\beta_1 - \dfrac{2}{7}\beta_2 + \beta_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \frac{7}{12}\mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \dfrac{7}{2} & 0 & -\dfrac{7}{12}\beta_1 + \dfrac{7}{6}\beta_2 - \dfrac{7}{12}\beta_3 \\ 0 & 0 & \dfrac{12}{7} & \dfrac{1}{7}\beta_1 - \dfrac{2}{7}\beta_2 + \beta_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{L}_3 \leftarrow \frac{7}{12}\mathrm{L}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \dfrac{7}{2} & 0 & -\dfrac{7}{12}\beta_1 + \dfrac{7}{6}\beta_2 - \dfrac{7}{12}\beta_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{12}\beta_1 - \dfrac{1}{6}\beta_2 + \dfrac{7}{12}\beta_3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2}{\xrightarrow{\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{2}{7}\mathrm{L}_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \dfrac{7}{6}\beta_1 - \dfrac{1}{3}\beta_2 + \dfrac{1}{6}\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{6}\beta_1 + \dfrac{1}{3}\beta_2 - \dfrac{1}{6}\beta_3 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{12}\beta_1 - \dfrac{1}{6}\beta_2 + \dfrac{7}{12}\beta_3 \end{array}\right)$$

d'où
$$\boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{12}\beta_1 & -\dfrac{1}{6}\beta_2 & +\dfrac{1}{12}\beta_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{6}\beta_1 & +\dfrac{1}{3}\beta_2 & -\dfrac{1}{6}\beta_3 \\ x_3 = \dfrac{1}{12}\beta_1 & -\dfrac{1}{6}\beta_2 & +\dfrac{7}{12}\beta_3 \end{cases}}$$

I.A.2.a On généralise la méthode de la question précédente en utilisant les termes de la diagonale de haut en bas pour supprimer les 1 sous la diagonale. On aboutit