CCP Physique 2 PC — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Fourmond (ENS Ulm) ; il a été relu par Éric Armengaud (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (ENS Lyon).

Ce sujet se compose de deux problèmes distincts :

- Le premier considère deux arbres reliés électriquement et étudie les moyens de transmettre un couple entre eux uniquement à l'aide des courants induits. Il commence par une étude en régime permanent suivie d'une étude dynamique.

  Ce problème permet, grâce à des questions de difficulté croissante, de travailler sur l'induction et la notion de couple.

- Le second problème propose une modélisation de l'effet Hall dans un conducteur afin de comprendre le fonctionnement d'une sonde de champ magnétique. Il commence par une modélisation en régime permanent, s'intéresse ensuite à ce qui se passe dans le cas d'un champ extérieur variable, pour finir avec une estimation de la chaleur dissipée et de la variation de température que cela entraîne.

  C'est un problème assez complet pour travailler sur les champs magnétiques, leurs symétries, les équations aux dérivées partielles et la notation complexe. La majorité des questions sont relativement simples ; quelques-unes, plus délicates, demandent de prendre des initiatives. En outre, deux questions de ce problème reposent sur une supposition assez discutable de l'énoncé, ce qui ne rend pas les choses faciles.

Indications

Premier problème

2.1 Remarquer que le champ des forces de Laplace est uniforme.

4.1 Écrire le théorème du moment cinétique pour chacun des disques, et introduire α.

4.2 Prendre la somme des équations obtenues à la question 4.1.

4.3 Penser à faire un bilan d'énergie.

Second problème

I.1 La force de Lorentz dévie les électrons sur les bords et engendre une accumulation de charge sur les bords, ce qui crée un champ électrique. Calculer sa valeur à l'équilibre.

I.3 Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{E}'}$ en fonction du champ total $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et reporter le résultat dans la loi d'Ohm.

I.6 Montrer que mettre un potentiomètre entre deux points le long du même côté permet en quelque sorte de « déplacer » la soudure.

II.2 Utiliser l'équation de Maxwell-Ampère.

II.5 Pour justifier la parité de $\overrightarrow{\mathrm{J}}$, remarquer que le système est laissé invariant par une symétrie axiale.

II.6 Écrire les relations de continuité du champ en $y = \pm b/2$.

II.7 Supposer que $h \ll b$ et que cela se traduit par $\overrightarrow{\mathrm{B}_0} = \overrightarrow{\mathrm{B}_0}(y)$.

II.8 Pour calculer $\mathrm{U_H}$, ne pas expliciter B et $\mathrm{B_0}$ mais utiliser les questions II.3 et II.7. Exprimer le résultat en fonction de h et non de n.

III.1 Écrire la résistance du conducteur envisagé en fonction de sa conductivité.

III.3 Utiliser un résultat de la question II.3 et justifier que $\mathrm{J}(0) = 0$ de la même manière qu'à la question II.5.

III.5 Ne pas oublier que la plaque a deux côtés !

Premier problème

Transmission entre deux arbres

Pour plus de clarté, on note $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_z}$ les vecteurs de base des coordonnées cylindriques d'axe $(\mathrm{O_1O_2})$.

1. Forces électromotrices

1.1 En se plaçant dans le référentiel du disque, on observe un champ électrique

$$\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\text{induit}} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse du point considéré dans le référentiel du laboratoire.

> Cette formule n'est vraie que pour un changement de référentiel galiléen – et pour des vitesses faibles. Cependant, on peut à chaque instant attacher un référentiel galiléen à chaque point de la roue, ce qui permet d'étendre cette relation à notre cas qui n'est pas galiléen.

Puisque
$$\mathrm{dV} = -\overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$$

on a
$$\begin{aligned} \mathrm{V(A_1)} - \mathrm{V(O_1)} &= \int_{\mathrm{A_1}}^{\mathrm{O_1}} \overrightarrow{\mathrm{E}}_{\text{induit}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \\ &= \int_{\mathrm{A_1}}^{\mathrm{O_1}} \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \end{aligned}$$

Comme
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{r} = r\,\omega_1\,\overrightarrow{u_\theta}$$

on a
$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} = r\,\omega_1\,\mathrm{B}\,(\overrightarrow{u_\theta} \wedge \overrightarrow{u_z}) = r\,\omega_1\,\mathrm{B}\,\overrightarrow{u_r}$$

> Ici, l'énoncé nous demande explicitement de calculer cette intégrale le long du rayon $\mathrm{O_1A_1}$. Il convient cependant de vérifier qu'elle ne dépend pas du chemin d'intégration. $\overrightarrow{\mathrm{E}}_{\text{induit}}$ est radial et ne dépend que de r, son rotationnel est donc nul. Il s'agit bien d'un champ dérivant d'un potentiel – son intégrale le long d'un chemin ne dépend que des points initial et final.

On veut calculer une force électromotrice. On travaille donc en convention générateur (flèches orientant le courant et la tension dans le même sens). e_1 est donc la différence de potentiel entre $\mathrm{A_1}$ et $\mathrm{O_1}$. Comme on intègre le long du rayon $\mathrm{O_1A_1}$, on a

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r}$$

donc
$$e_1 = \mathrm{V(A_1)} - \mathrm{V(O_1)} = \int_{r=0}^{a} \omega_1\,\mathrm{B}\,r\,\mathrm{d}r$$

c'est-à-dire
$$\boxed{e_1 = \omega_1\,\mathrm{B}\,\frac{a^2}{2}}$$

1.2 On obtient avec le même raisonnement qu'à la question précédente

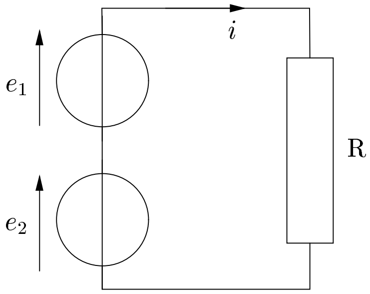
$$\mathrm{V(A_2)} - \mathrm{V(O_2)} = \omega_2\,\mathrm{B}\,\frac{a^2}{2}$$

Cependant le courant traverse le disque dans l'autre sens, donc en conservant la convention générateur, on a

$$e_2 = \mathrm{V(O_2)} - \mathrm{V(A_2)}$$

$$\boxed{e_2 = -\omega_2\,\mathrm{B}\,\frac{a^2}{2}}$$

1.3 Le circuit total est équivalent à



On en déduit $\mathrm{R}i = e_1 + e_2$

d'où $$\boxed{i = \frac{\mathrm{B}\,a^2}{2\mathrm{R}}\,(\omega_1 - \omega_2)}$$

2. Force et couple

2.1 La force de Laplace qui s'exerce sur un élément de conducteur $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ traversé par un courant i est donnée par

$$\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{F_L}} = i\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}$$

où i est compté positivement s'il va dans le sens de $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$.

> Ici, on modélise la distribution de courant sur le disque par une ligne de courant le long de $[\mathrm{O_2A_2}]$.

En intégrant de $\mathrm{A_2}$ à $\mathrm{O_2}$, on obtient la force sur tout le rayon

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{F_L}} &= \int_{\mathrm{A_2}}^{\mathrm{O_2}} i\,\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} \\
&= i\left(\int_{\mathrm{A_2}}^{\mathrm{O_2}} \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}\right) \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}} \\
&= i\,\overrightarrow{\mathrm{A_2O_2}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F_L}} = i\,\mathrm{B}\,a\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

> Ici, on intègre de $\mathrm{A_2}$ à $\mathrm{O_2}$ pour que i soit dans le sens de $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$.