CCP Physique 1 PC 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) ; il a été relu par Fabien Guérin (École polytechnique), Jean-David Picon (École polytechnique) et Vincent Fourmond (ENS Ulm).

Ce sujet se compose de deux problèmes indépendants ayant pour point commun l'étude de la pression.

Le premier problème s'intéresse aux circulations d'air dans l'atmosphère. Il introduit graduellement les phénomènes physiques à l'origine des vents :

- les forces de pression et notamment l'alternance de zones dépressives et anticycloniques ;
- la force de Coriolis, responsable de la persistance de ces zones.

Il résout alors les équations dynamiques dans un cadre de plus en plus général.

Le second problème traite plus particulièrement de l'étude et de la production du vide. Il permet une révision d'une partie de la théorie cinétique des gaz, notamment le calcul des vitesses moyenne et quadratique moyenne des molécules. Il familiarise aussi avec la loi des gaz parfaits qu'il fait manipuler sous toutes ses formes.

Le sujet est d'une difficulté très raisonnable pour peu que l'on sache manipuler les produits vectoriels et la loi des gaz parfaits. Il met d'ailleurs en avant, au détour de la question IV.3 de la seconde partie, une limite de la thermodynamique classique.

Indications

Problème I

I.1 Faire un bilan sur une particule de largeur δx.

II.1 On peut retrouver la forme de l'accélération de Coriolis sur un exemple simple : une particule immobile au-dessus d'un disque tournant par exemple.

II.4 Supposer $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{\mathrm{U}_z}$.

II.9 Considérer le signe de α.

II.10 Paris est à une latitude de 47°.

IV.1 Considérer le repère de Frenet de la particule.

IV.3 Projeter la relation de la dynamique sur $\overrightarrow{w}$ et remplacer $\|\overrightarrow{\mathrm{F}}\|$ en fonction de $\mathrm{V_g}$.

IV.4 Une solution physique ne devrait pas diverger.

Dériver l'équation pour obtenir le signe de $\dfrac{\mathrm{dV_{h-}}}{\mathrm{d}r}$ et en déduire la position du maximum.

Problème II

I.4 Utiliser la loi des gaz parfaits sous toutes ses formes pour cette question et toutes les suivantes.

II.4 Étant donnée une distribution f de vitesses, la valeur moyenne d'une fonction $a(v)$ s'écrit

$$\int_0^\infty a(v)\,f(v)\,\mathrm{d}v$$

IV.2 La variation d'entropie pour un gaz parfait entre un état initial $(\mathrm{V_i}, \mathrm{T_i})$ et un état final $(\mathrm{V_f}, \mathrm{T_f})$ s'écrit

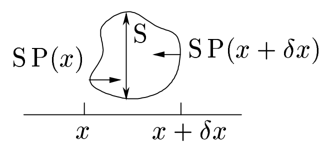
$$\Delta\mathrm{S} = \mathrm{C_V}\,\ln\frac{\mathrm{T_f}}{\mathrm{T_i}} + \mathrm{N}\,k\,\ln\frac{\mathrm{V_f}}{\mathrm{V_i}}$$

IV.3 Cette question est délicate car deux raisonnements menant à des conclusions opposées sont a priori recevables. Les deux questions que l'on peut se poser sont : « En quoi le résultat de la question précédente dépend de la composition des deux gaz ? » et « En quoi l'état final est-il différent de l'état initial ? »

Premier problème
Circulation d'air dans l'atmosphère terrestre

I. Questions préliminaires : particule fluide soumise à un gradient de pression

I.1 La particule δm placée en $x + \delta x/2$, de section S et de largeur δx est soumise aux forces de pression présentes de part et d'autre de sa position. Comme la particule est petite, on peut écrire



$$\delta\mathrm{F} = \mathrm{S}\,\mathrm{P}(x) - \mathrm{S}\,\mathrm{P}(x+\delta x)$$

Un développement de Taylor au premier ordre donne

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x+\delta x) &= \mathrm{P}(x) + \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}x}\,\delta x + \mathrm{o}\,(\delta x)\\ &= \mathrm{P}(x) - \gamma\,\delta x + \mathrm{o}\,(\delta x)\end{aligned}$$

d'où $$\delta\mathrm{F} = \gamma\,\mathrm{S}\,\delta x$$

D'autre part, notre particule de masse δm et de volume $\mathrm{S}\,\delta x$ possède une masse volumique

$$\rho = \frac{\delta m}{\mathrm{S}\,\delta x}$$

On obtient donc bien la relation $$\boxed{\frac{\delta\mathrm{F}}{\delta m} = \frac{\gamma}{\rho}}$$

> Il est important de procéder calmement et avec méthode pour cette première question. Cela a le double objectif de mettre en confiance et de donner tout de suite une bonne impression au correcteur.

I.2 L'accélération $\ddot{x}$ de la particule d'air s'écrit, d'après la relation fondamentale de la dynamique,

$$\ddot{x} = \frac{\delta\mathrm{F}}{\delta m} = \frac{\gamma}{\rho}$$

On prend pour situation initiale une particule située en $x_0 = 0$ au cœur de la zone anticyclonique. Sa vitesse initiale V_0 est donc nulle. Une première intégration de l'équation précédente donne alors

$$\mathrm{V} = \dot{x} = \frac{\gamma}{\rho}\,t + \mathrm{V}_0 = \frac{\gamma}{\rho}\,t$$

En intégrant une seconde fois, on trouve l'évolution temporelle de la position :

$$x = \frac{\gamma}{\rho}\,\frac{t^2}{2} + x_0 = \frac{\gamma}{\rho}\,\frac{t^2}{2}$$

On élimine à présent le temps t dans les deux équations précédentes et on obtient

$$\boxed{\mathrm{V} = \sqrt{\frac{2\,\gamma\,x}{\rho}}}$$

> Cette expression n'est rien d'autre que l'application de la formule
> $$v_f{}^2 - v_i{}^2 = 2\,a\,(x_f - x_i)$$
> démontrée en Terminale et valable pour toute accélération a constante.

Application numérique :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Pour } x = 100 \text{ km} & v = \ \ 60 \text{ km/h} \\ \text{Pour } x = 500 \text{ km} & v = 140 \text{ km/h} \end{array}}$$

L'ordre de grandeur correspond aux vents rencontrés sous nos contrées. Néanmoins, en l'absence d'autre phénomène physique, l'équilibre des pressions serait bien vite atteint et aucun système dépressionnaire ou anticyclonique stable ne pourrait être observé.

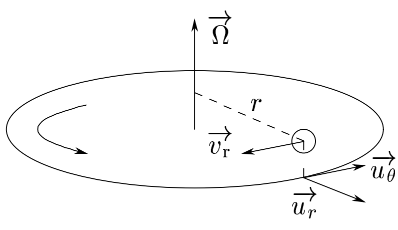
II. Vent géostatique

II.1 La force de Coriolis s'exprime en fonction de l'accélération de Coriolis qui apparaît lors du passage à un référentiel non galiléen.

$$\overrightarrow{F_c} = -m\,\overrightarrow{a_c} = -m\,2\,\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

d'où $$\boxed{\overrightarrow{F_c} = 2\,m\,\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{\omega}}$$

où $\overrightarrow{v_r}$ est la vitesse de la particule fluide relativement au référentiel (non galiléen) attaché au sol.

> Une manière rapide de retrouver la forme de l'accélération de Coriolis est de considérer un cas simple.
>
> Prenons une particule immobile qui ne soit soumise à aucune force dans un référentiel galiléen. Plaçons cette particule « en suspension » au-dessus d'un disque tournant à vitesse angulaire Ω et à une distance r du centre.
>
> 
>
>
> Sa vitesse par rapport au disque vaut donc
> $$\overrightarrow{v_r} = -r\,\Omega\,\overrightarrow{u_\theta}$$
> Son accélération par rapport au disque (mouvement circulaire uniforme) vaut
> $$\overrightarrow{a_r} = -r\,\Omega^2\,\overrightarrow{u_r}$$
> L'accélération du point d'entraînement vaut de même :
> $$\overrightarrow{a_e} = -r\,\Omega^2\,\overrightarrow{u_r}$$
> On a donc $$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_c}$$
> d'où $$\boxed{\overrightarrow{a_c} = 2\,r\,\Omega^2\,\overrightarrow{u_r} = 2\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r}}$$