CCP Physique 1 MP 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Lepage (doctorant) ; il a été relu par Jean-David Picon (École Polytechnique) et Vincent Fourmond (ENS Ulm).

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants ayant pour point commun l'aéronautique.

Le premier problème consiste en l'étude d'un climatiseur pour avion pressurisé. Il couvre l'essentiel du programme de thermodynamique.

- La première partie concerne la conduction thermique et les pertes thermiques à travers les parois.
- Le premier et le second principe de la thermodynamique appliqués aux machines thermiques sont approfondis dans la deuxième partie.
- La troisième partie permet l'application des lois démontrées précédemment à chaque partie du climatiseur, afin d'effectuer un bilan sur l'ensemble du système.

Le second problème étudie le fonctionnement d'un gyroscope. Il est, de loin, plus calculatoire que le précédent. Il ne nécessite pas de connaissances préalables sur l'appareil, mais des notions de mécanique dans un référentiel non galiléen.

- L'application du principe fondamental de la mécanique dans ce type de référentiel est étudiée dans la première partie.
- La deuxième partie introduit l'approximation gyroscopique.
- La troisième éclaire sur un dispositif de correction du gyroscope concernant l'affichage de la verticale.
- Enfin, son comportement au cours d'un virage est étudié dans la quatrième partie.

Ce problème permet de comprendre comment un gyroscope détermine la position d'un avion par rapport à l'horizontale, et ceci quel que soit le mouvement.

Ce sujet recèle plusieurs questions ambiguës quant au résultat attendu, à la manière de les traiter ou bien à la définition des grandeurs.

Indications

Partie A

A.I.2 Dans la loi de Fourier, exprimer la densité de flux thermique en fonction de la puissance et de la surface.

A.I.3 Poser l'équation différentielle issue de la loi de Fourier avant de la résoudre car la variation de la température n'est plus linéaire à travers la paroi.

A.I.5 Réaliser un bilan des puissances échangées avec la cabine.

A.II.2 Utiliser la loi des gaz parfaits.

A.II.3.c Appliquer le premier principe de la thermodynamique avec les expressions du travail trouvées dans les questions précédentes.

A.II.4.c Établir la relation demandée à partir des résultats des questions A.II.4.b et A.II.3.c.

A.II.5.a Utiliser la relation $\mathrm{dH} = \mathrm{TdS} + \mathrm{VdP}$ comme point de départ.

A.II.5.b Calculer $\Delta\mathrm{S}$ et $\mathrm{S}_{\text{échangée}}$.

A.III.1 Q_2 et P_t correspondent à des phénomènes opposés.

A.III.2.b Utiliser la loi de Laplace en énonçant les conditions d'application.

A.III.3.a Réaliser un encadrement de T_2.

A.III.5.b Ne pas oublier la relation obtenue à la question A.III.2.c avec $p_\mathrm{c} = p_\mathrm{e}$.

Partie B

B.I.1 Inclure les forces de repère.

B.I.4.b Appliquer le PDF au pilote en incluant la force qui le maintient immobile.

B.III.1.a Dessiner $\mathrm{d}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}\,(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{u}\,(t)$.

B.III.2.a Projeter l'équation différentielle de la question B.II.2.b sur $\overrightarrow{e_{z_a}}$.

B.IV.1 Pour le signe, utiliser la règle de la main droite.

B.IV.3 Utiliser les formules de dérivation dans les repères tournants.

B.IV.4.e Déterminer les composantes de $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{e_z}$ dans R_a.

A. Thermodynamique : étude d'un climatiseur pour avion pressurisé

A.I Bilan énergétique de la cabine

A.I.1 λ est la conductivité thermique et se mesure, dans le Système International en watts par mètre par Kelvin ($\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$).

> On peut retrouver l'unité de la conductivité thermique grâce à la loi de Fourier.
>
> $$\overrightarrow{\phi} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T}$$
>
> - $\overrightarrow{\phi}$: densité de courant thermique $\left(\mathrm{W.m^{-2}}\right)$
> - $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T}$: gradient de température $\left(\mathrm{K.m^{-1}}\right)$

A.I.2 Le problème est étudié en régime stationnaire. Les variables sont donc indépendantes du temps. La loi de Fourier est par conséquent applicable et l'on obtient avec la convention de signe de l'énoncé

$$\overrightarrow{\phi} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T}$$

La variable T ne dépend que de z, d'où

$$\phi = \lambda\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}z}$$

Il y a conservation du flux à travers la base. Le gradient de température est donc uniforme, et la température affine au travers de la base.

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{T_e - T_c}}{\mathrm{E}}$$

Si $(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{b}}$ est la puissance thermique à travers une des deux bases, on a

$$\phi = \frac{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{b}}}{\mathrm{S_{base}}}$$

On en déduit

$$\frac{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{b}}}{\pi\dfrac{\mathrm{D}^2}{4}} = \lambda\frac{\mathrm{T_e - T_c}}{\mathrm{E}}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{T_e - T_c} = \frac{4\mathrm{E}\,(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{b}}}{\pi\mathrm{D}^2\lambda}}$$

> Démontrons que le flux à travers la base est constant. Pendant un intervalle de temps Δt, l'énergie entrant sous forme de chaleur dans la base de surface S à l'abscisse z est égale à $\phi\,(z)\,\mathrm{S}\Delta t$, tandis que que l'énergie sortant sous forme de chaleur de la même base à l'abscisse $z + \Delta z$ dans le même intervalle de temps a pour valeur $\phi\,(z + \Delta z)\,\mathrm{S}\Delta t$. L'évolution se faisant sans apport

> d'énergie sous forme de travail, l'énergie interne U du système de volume $S\Delta z$ varie donc, dans l'intervalle de temps Δt, de la quantité
> $$\mathrm{U}(t+\Delta t)-\mathrm{U}(t)=(\phi(z)-\phi(z+\Delta z))\,\mathrm{S}\Delta t$$
> Ceci correspond à une variation de l'énergie volumique qui s'écrit
> $$\frac{\Delta \mathrm{U_V}}{\Delta t}=-\left(\frac{\phi(z+\Delta z)-\phi(z)}{\Delta z}\right)$$
> Lorsqu'on fait tendre Δz et Δt vers 0, on obtient la relation entre les dérivées partielles traduisant localement la loi de conservation de l'énergie, que l'on appelle équation de continuité :
> $$\frac{\partial \mathrm{U_V}}{\partial t}=-\frac{\partial \phi}{\partial z}$$
> En régime stationnaire, on vérifie ainsi que le flux thermique à travers la base ne dépend pas de z.

A.I.3 De même, la puissance est la même à travers n'importe quelle section cylindrique de rayon ρ. La température, quant à elle, ne dépend que de ρ, d'où
$$\frac{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{c}}}{\mathrm{S_{latérale}}}=\lambda\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\rho}$$
soit
$$\frac{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{c}}}{2\pi\rho\mathrm{L}}=\lambda\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d}\rho}$$
Séparons les variables
$$\mathrm{dT}=\frac{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{c}}}{2\pi\lambda\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$
Intégrons cette équation entre la paroi extérieure et la paroi intérieure :
$$\mathrm{T_e}-\mathrm{T_c}=\frac{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{c}}}{2\pi\lambda\mathrm{L}}\ln\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{\rho_{\mathrm{c}}}$$
d'où
$$\boxed{\mathrm{T_e}-\mathrm{T_c}=\frac{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{c}}}{2\pi\lambda\mathrm{L}}\ln\frac{\mathrm{D}+2\mathrm{E}}{\mathrm{D}}}$$

A.I.4 La puissance thermique totale traversant la paroi de la cabine est égale à la somme de la puissance thermique transmise à travers les différentes surfaces. Par conséquent,
$$\begin{aligned}(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{t}}&=2\,(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{b}}+(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{c}}\\&=\frac{\pi\lambda\mathrm{D}^2}{2\mathrm{E}}(\mathrm{T_e}-\mathrm{T_c})+\frac{2\pi\mathrm{L}\lambda}{\ln\dfrac{\mathrm{D}+2\mathrm{E}}{\mathrm{D}}}(\mathrm{T_e}-\mathrm{T_c})\end{aligned}$$

$$\boxed{(\Phi_{\mathrm{th}})_{\mathrm{t}}=a\,(\mathrm{T_e}-\mathrm{T_c})\qquad\text{avec}\qquad a=\pi\lambda\left(\frac{\mathrm{D}^2}{2\mathrm{E}}+\frac{2\mathrm{L}}{\ln\left(\dfrac{\mathrm{D}+2\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\right)}\right)=520\ \mathrm{W.K^{-1}}}$$

> a est aussi appelé conductance thermique par analogie à la conductance en électricité. Si l'on fait correspondre l'intensité électrique à la puissance thermique totale, ainsi que la différence de potentiel à celle de la température, on retrouve alors la loi d'Ohm $\mathrm{I}=\mathrm{GU}$ avec G la conductance électrique.