Mines Maths toutes filières 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Laurent Thomann (ENS Cachan) ; il a été relu par Emmanuel Delsinne (ENS Cachan) et Yacine Dolivet (ENS Ulm).

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

Dans le premier problème, consacré à l'analyse, on étudie dans la partie A une intégrale à deux paramètres et dans la partie B une suite, via une étude de fonction. Les résultats obtenus sont utilisés dans la partie C pour l'étude d'une suite d'intégrales à un paramètre dont on démontre que sa limite vérifie une équation fonctionnelle.

Dans le second problème, consacré à l'algèbre, on étudie dans la partie A une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Puis, dans la partie B, on calcule la puissance n^{e} d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour généraliser dans la partie C les résultats de la partie A.

La résolution de ces deux problèmes met en œuvre beaucoup d'outils classiques d'analyse et d'algèbre matricielle. De plus, elle permet de bien asseoir sa maîtrise des méthodes concernant les suites, puisqu'on est amené à étudier des suites de réels, une suite de fonctions définies par des intégrales et une suite de matrices.

Indications

Premier problème

A.1 Revenir à la définition de t^a.

A.2 Faire un changement de variable.

A.3 Intégrer par parties.

A.4 En utilisant la question précédente, faire un produit télescopique.

A.5 Utiliser la question précédente.

A.6 Faire un changement de variable.

B.1 f_a est également définie pour des valeurs négatives.

B.2 Intégrer une inégalité bien choisie.

B.3 Prendre un équivalent de $\ln(1+u)$ en 0.

B.5 Étudier $(\ln y_n)$ en utilisant l'étude de fonction.

C.1 Faire un changement de variable dans F_n.

C.2 Pour x fixé, étudier le signe de $\ln\left(\dfrac{\mathrm{F}_n(x)}{\mathrm{F}_{n+1}(x)}\right)$ en utilisant les questions A.1 et C.1.

C.3.b Utiliser la question C.3.a après avoir découpé l'intégrale convenablement.

C.4 Montrer que pour x positif

$$\frac{\mathrm{F}_n(x+1)}{(x+1)\mathrm{F}_n(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Deuxième problème

B.3 Prendre P la matrice de changement de base de $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ vers $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et D la matrice de la question précédente.

C.2 Appliquer le résultat de la question B.4.

C.3 Utiliser la question C.1.

C.5 Se rappeler ce qu'est un projecteur.

C.6 Procéder comme dans la partie A.

Premier problème

Partie A

A.1 Si a est nul, $t^a = 1$ pour tout t strictement positif. On peut donc prolonger la fonction en 0 par la valeur 1.

$$\boxed{g_0 \text{ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1.}}$$

On suppose à présent $a > 0$. Par définition, $t^a = \mathrm{e}^{a \ln t}$ pour t strictement positif.

Pour $a > 0$ $$a \ln t \xrightarrow[t \to 0]{} -\infty$$

donc $$\mathrm{e}^{a \ln t} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

$$\boxed{g_a \text{ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.}}$$

Pour $a \geqslant 1$, g_a est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Or, d'après ce qui précède,

$$\frac{g_a(t) - g_a(0)}{t} = t^{a-1} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

${g_a}'$ peut donc se prolonger par continuité en 0 par 0 et, d'après le théorème limite de la dérivée :

$$\boxed{g_a \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{pour } a \geqslant 1.}$$

> Rappelons le théorème limite de la dérivée, également appelé théorème de l'Hospital : « Soit f une fonction continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;b\,]$. Si f' admet une limite finie ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. »
> Attention, ce théorème n'admet pas de réciproque, sauf si $\lim\limits_{x \to a} |f'| = +\infty$. Dans les autres cas, on peut utiliser le taux d'accroissement.

A.2 Comme g_a désigne désormais la fonction prolongée,

$$u : \begin{cases} [\,0\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto g_a(t) g_b(1-t) \end{cases}$$

est continue pour a et b positifs.

Ainsi $$\boxed{\text{l'intégrale } \mathrm{I}(a,b) \text{ est définie.}}$$

Faisons le changement de variable affine $x = 1 - t$:

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^1 t^a (1-t)^b \,\mathrm{d}t = -\int_1^0 (1-x)^a x^b \,\mathrm{d}x = \mathrm{I}(b,a)$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(b,a)}$$

> L'écriture est dite abusive car dans la définition de $\mathrm{I}(a,b)$, g_a désigne la fonction prolongée, alors que $t \mapsto t^a$, elle, n'est pas prolongée en 0.

A.3 $$\mathrm{I}(a+1,b) = \int_0^1 t^{a+1}(1-t)^b \,\mathrm{d}t$$

D'après la question A.1, g_{a+1} est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc intégrer $\mathrm{I}(a+1,b)$ par parties :

$$\mathrm{I}(a+1,b) = \left[-\frac{(1-t)^{b+1}}{b+1}t^{a+1}\right]_0^1 + \frac{a+1}{b+1}\int_0^1 t^a(1-t)^{b+1}\,\mathrm{d}t$$

d'où $$\boxed{\mathrm{I}(a+1,b) = \frac{a+1}{b+1}\,\mathrm{I}(a,b+1)}$$

A.4 On a $$\mathrm{I}(a,0) = \int_0^1 t^a \,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+1}$$

et, pour $n > 0$, $$\mathrm{I}(a,n) = \frac{n}{a+1}\mathrm{I}(a+1,n-1)$$

Par suite,
$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(a,n) &= \frac{n}{a+1}\,\mathrm{I}(a+1,n-1)\\
\mathrm{I}(a+1,n-1) &= \frac{n-1}{a+2}\,\mathrm{I}(a+2,n-2)\\
&\vdots\\
\mathrm{I}(a+(n-1),1) &= \frac{1}{n+a}\,\mathrm{I}(a+n,0)
\end{aligned}$$

En remplaçant successivement, on obtient

$$\mathrm{I}(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\,\mathrm{I}(n+a,0)$$

Comme $$\mathrm{I}(n+a,0) = \frac{1}{a+n+1}$$

on a bien $$\boxed{\mathrm{I}(a,n) = \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)}}$$

> On peut aussi raisonner par récurrence, mais la méthode précédente est plus intéressante dans la mesure où elle permet de calculer directement $\mathrm{I}(a,b)$ sans connaître le résultat.