# Mines Maths 2 PSI 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Lecomte (ENS Cachan) et Alexander Gewirtz (ENS Lyon) ; il a été relu par François Michel (École Polytechnique) et Olivier Bertrand (ENS Lyon).

---

Ce problème comporte deux parties. Son objet est l'étude de l'équation différentielle

$$\mathrm{E}_\lambda : \qquad xy'' + (1-x)y' - \lambda y = 0$$

- Dans la première partie, on commence par étudier les solutions de cette équation qui sont développables en série entière. Puis on se place dans le cas particulier $\lambda = 1$ et on essaie d'exprimer ces solutions de manière plus explicite à l'aide de fonctions usuelles. Enfin, on applique les résultats précédents à l'étude d'une équation aux dérivées partielles.
- Dans la seconde partie, on se place dans le cas particulier $\lambda = 1/2$ et on étudie les propriétés de la solution développable en série entière $f_{\frac{1}{2}}$.

Il s'agit là d'un problème assez classique, qui ne présente pas de grosses difficultés. Sa résolution permet de tester ses connaissances sur les développements en série entière et sur l'utilisation des intégrales dépendant d'un paramètre.

## Indications

### Première partie

I-1.c Penser à la règle de D'Alembert.

I-2.a On connaît déjà une solution de $\mathrm{E}_1$ ; utiliser la méthode de variation de la constante.

I-2.c Donner l'expression d'une solution de $\mathrm{E}_1$ (sur $\mathbb{R}$) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$, puis étudier le « raccord » en 0 par continuité.

I-3.b Bien utiliser les résultats admis aux questions I-1.c et I-3.b.

I-3.d Utiliser le résultat des questions I-1.b et I-3.c.

### Seconde partie

II-1 Chercher une relation de récurrence entre les $(\mathrm{I}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une intégration par parties.

II-2.a Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale dans sa version la plus simple.

II-2.b Montrer que $\varphi$ vérifie la même équation différentielle que $f_{\frac{1}{2}}$. En déduire qu'elle lui est proportionnelle.

II-3.a Utiliser la convexité de la fonction exponentielle inverse $1/\exp$.

II-3.b Faire le changement de variable $u = \tan\theta$, puis reconnaître la dérivée d'une fonction connue.

II-3.c Utiliser la question II-3.a et la valeur de $\mathrm{J}(x)$.

II-3.d Montrer que $0 \leqslant \sin u \leqslant u$ sur l'intervalle $\left[0\,; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et appliquer la croissance de l'intégrale.

II-3.e Utiliser les résultats des questions II-3.c et II-3.d pour obtenir un encadrement de $\varphi$ sur $]-\infty, -1]$. En déduire les limites demandées.

II-4.a La parité de $h$ se déduit de la relation obtenue à la question I-3.b dans le cas $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Pour obtenir la représentation intégrale de $h$, utiliser la propriété du cosinus hyperbolique comme partie paire de l'exponentielle. Puis procéder par changements de variables pour faire apparaître $\varphi$.

II-4.b Déterminer d'abord la limite de $h$ en $-\infty$ en utilisant les encadrements des questions précédentes. Conclure en utilisant la parité de $h$.

II-4.c Utiliser la parité de $h$ et le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Première partie

## I-1 Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle

**I-1.a** D'après l'énoncé, il est admis qu'il existe une fonction $f_\lambda$, somme d'une série entière de rayon de convergence R, strictement positif, prenant la valeur 1 en 0 ($f_\lambda(0) = 1$), solution dans l'intervalle $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ de l'équation différentielle $\mathrm{E}_\lambda$. Cette solution est définie par la relation :

$$\forall x \in ]-\mathrm{R},\mathrm{R}[ \qquad f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

**Détermination des coefficients $(a_n)_{n\geqslant 1}$**

$f_\lambda$ étant somme d'une série entière sur l'intervalle $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle et ses dérivées première et seconde sont obtenues en dérivant terme à terme. Ainsi :

$$\forall x \in ]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[ \qquad f_\lambda'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\forall x \in ]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[ \qquad f_\lambda''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Par suite, pour $x \in ]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ :

- $x f_\lambda''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}$
- $(1-x) f_\lambda'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$

Ainsi $f_\lambda$ est solution de $\mathrm{E}_\lambda$ si et seulement si, pour tout $x \in ]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \lambda - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

Soit, en modifiant les indices de sommation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \lambda - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n x^n = 0$$

Or une série entière est nulle si et seulement si chacun de ses coefficients est nul. On en déduit donc que $f_\lambda$ est solution de $\mathrm{E}_\lambda$ si et seulement si :

$$a_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1 \qquad n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - n a_n - \lambda a_n = 0$$

soit encore
$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2}\, a_n$$

D'où l'on déduit l'expression des $a_n$ :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad a_n = \frac{1}{(n\,!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k+\lambda)}$$

**Calcul effectif de $f_1$, $f_0$, $f_{-1}$ et $f_{-2}$**

- Pour $\lambda = 1$, on a alors :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n = \frac{1}{n\,!}$$

donc $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_1(x) = e^x}$$

- Pour $\lambda = 0$, on a

$$\forall n \geqslant 1 \qquad a_n = 0$$

par suite $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_0(x) = 1}$$

- Pour $\lambda = -1$, on a $a_1 = -1$ et :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad a_n = 0$$

Ainsi $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{-1}(x) = 1 - x}$$

- Pour $\lambda = -2$, on a $a_1 = -2$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \geqslant 3 \qquad a_n = 0$$

Par conséquent $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_{-2}(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}}$$

> Il est très important d'ajuster les indices de sommation de façon à ce que toutes les expressions aient le même indice en puissance de $x$. Sinon on a de grandes chances d'oublier de compter un terme constant, voire de se tromper dans les indices de la suite (c'est-à-dire remplacer $a_n$ par $a_{n+1}$ par exemple).

**I-1.b** Déterminons les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f_\lambda$ est un polynôme. On sait que c'est le cas si et seulement si tous les coefficients de la série entière définissant $f_\lambda$ sont nuls, sauf éventuellement un nombre fini.

Or $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \frac{n+\lambda}{(n+1)^2}\,a_n$$

et dès qu'un coefficient est nul, tous les suivants le sont. Ainsi :

$$\begin{aligned}
f_\lambda \text{ est un polynôme } &\iff \exists n \in \mathbb{N} \qquad a_n = 0\\
&\iff \exists n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{(n\,!)^2}\prod_{k=0}^{n-1}(k+\lambda) = 0\\
&\iff \exists n \in \mathbb{N} \qquad \lambda = -n
\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{f_\lambda \text{ est un polynôme si et seulement si } \lambda \text{ est un entier négatif.}}$$

Supposons à présent cette dernière condition satisfaite (c'est-à-dire que $\lambda = -p$, avec $p$ entier) et déterminons le degré de $f_\lambda$ ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.