X Maths 2 PC 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Chomette (ENS Ulm) ; il a été relu par Vincent Beck (ENS Cachan) et David Lecomte (ENS Cachan).

Ce problème, composé de deux parties, est difficile par endroits car il fait appel à des techniques assez subtiles.

- La première partie traite des matrices symplectiques. On y montre, en utilisant la structure de groupe de leur ensemble, que leur déterminant est toujours égal à 1. On s'intéresse ensuite aux valeurs propres de ces matrices et à leur multiplicité : si λ est valeur propre d'une matrice symplectique M, de multiplicité d, alors il en est de même pour $\overline{\lambda}$, $1/\lambda$ et $1/\overline{\lambda}$.

  On s'intéresse enfin à quelques exemples de matrices symplectiques ayant des réductions particulières, ainsi qu'à un exemple de matrice symplectique non diagonalisable.

- Dans la deuxième partie, on s'intéresse aux formes symplectiques, montrant qu'elles ont quelques propriétés communes : elles n'existent qu'en dimension paire et s'écrivent sous la forme :

  $$(x, y) \mapsto (\eta\,(x)\,|y)$$

  où η est un endomorphisme vérifiant $\eta^* = -\eta$.

  Puis on s'intéresse aux endomorphismes symplectiques, faisant le lien avec les matrices. Enfin on démontre quelques résultats de stabilité des endomorphismes symplectiques, ainsi qu'un résultat sur l'image de la boule unité de la norme euclidienne par un endomorphisme symplectique.

Indications

Première partie

1.a Passer au déterminant dans la relation ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$.

1.b Penser à vérifier que les matrices sont bien inversibles avant de parler d'inverse.

1.d Passer par les inverses.

2.a Calculer par blocs le produit ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M}$.

2.b Utiliser le déterminant par blocs et les relations introduites à la question 2.a.

2.c Montrer que $(\underline{\mathrm{D}}v1|\underline{\mathrm{D}}v2) = s1(\underline{\mathrm{D}}v1|\underline{\mathrm{B}}v2) = s2(\underline{\mathrm{D}}v1|\underline{\mathrm{B}}v2)$.

2.d En raisonnant par l'absurde, construire un vecteur non nul de Ker M. Utiliser le fait qu'une famille orthogonale dans $\mathbb{R}^m$ a au plus m éléments non nuls, pour montrer qu'il y a au plus m réels tels que $\underline{\mathrm{D}} - s\underline{\mathrm{B}}$ non inversible.

3.a Montrer d'abord que $\det(x\mathrm{I}_n - \mathrm{M}) = \det(\mathrm{I}_n - x\mathrm{M})$.

3.b Conjuguer une égalité polynomiale pour avoir $\overline{\lambda_0}$ valeur propre. Utiliser la question 3.a pour avoir $\dfrac{1}{\lambda_0}$.

3.c Montrer en utilisant des arguments de degré que $m_1 + m_{-1}$ est pair. Montrer que m_1 est pair en utilisant le déterminant de M.

3.d Pour la question (**iv**), penser aux similitudes dans $\mathbb{R}^2$.

3.e Utiliser la question 2.d.

Deuxième partie

4.b Caractériser la forme linéaire $y \mapsto \omega(x, y)$ sous forme d'une produit scalaire.

5 Penser au déterminant de η^*.

7.a Travailler dans $\mathbb{C}^n$ et non dans $\mathbb{R}^n$.

7.b Raisonner en terme de conditions nécessaires. Montrer ensuite qu'alors la matrice M est idempotente, donc stable.

7.c Travailler là encore dans $\mathbb{C}^n$.

8.b Utiliser le fait que φ^* est aussi symplectique. Penser au fait que $\underline{\mathrm{J}}$ conserve la norme euclidienne.

I. Matrices symplectiques

1.a Soit M une matrice symplectique. Par définition ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$, donc, en passant au déterminant dans cette égalité :

$$\det\left({}^t\mathrm{M}\right)\det(\mathrm{J})\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{J})$$

Or la matrice J étant inversible, elle est de déterminant non nul. Et l'on sait par ailleurs que $\det\left({}^t\mathrm{M}\right) = \det(\mathrm{M})$. Par conséquent, après simplification, on obtient :

$$(\det(\mathrm{M}))^2 = 1$$

Enfin $$\boxed{\det(\mathrm{M}) = 1 \text{ ou } -1}$$

1.b D'après la question précédente, les matrices symplectiques sont inversibles. Il nous suffit alors de montrer que l'ensemble des matrices symplectiques est stable par multiplication et par passage à l'inverse, et qu'il est non vide (c'est-à-dire qu'il contient la matrice I_n, ce qui est évident).

Soient M_1 et M_2 deux matrices symplectiques. On a

$${}^t(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2)\,\mathrm{J}\,(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2) = {}^t\mathrm{M}_2\,{}^t\mathrm{M}_1\,\mathrm{J}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = {}^t\mathrm{M}_2\,\mathrm{J}\mathrm{M}_2 = \mathrm{J}$$

et le produit $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ est encore symplectique.

De même, si M est symplectique, on a :

$${}^t\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1} = {}^t\mathrm{M}^{-1}\,{}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M}\mathrm{M}^{-1} = {}^t\left(\mathrm{M}\mathrm{M}^{-1}\right)\mathrm{J}\left(\mathrm{M}\mathrm{M}^{-1}\right) = \mathrm{J}$$

et M^{-1} est également symplectique.

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices symplectiques est un groupe pour la multiplication.}}$$

1.c On calcule le produit ${}^t\mathrm{J}\,\mathrm{J}$ par blocs.

$${}^t\mathrm{J}\,\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} = \mathrm{I}_n$$

d'où $${}^t\mathrm{J}\,\mathrm{J}\mathrm{J} = \mathrm{I}_n\mathrm{J} = \mathrm{J}$$

$$\boxed{\text{J est elle-même symplectique.}}$$

> Tout au cours du problème, nous avons à manier des matrices par blocs. Il est donc important de se persuader, si nécessaire, que les opérations matricielles effectuées par blocs correspondent bien aux opérations matricielles classiques. Il s'agit essentiellement du produit par blocs et de la transposition. Pour la transposition par blocs, il faut transposer les blocs diagonaux et permuter les autres deux à deux tout en les transposant également. Il suffit, pour voir cela, d'indicer correctement les matrices et de faire les calculs !

1.d Soit M une matrice symplectique. Alors M^{-1} est symplectique d'après la question 1.b, c'est-à-dire que ${}^t\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{J}\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{J}$. Donc, en passant aux inverses,

$$\mathrm{M}\mathrm{J}^{-1}\,{}^t\mathrm{M} = \mathrm{J}^{-1}$$

Mais nous avons vu que ${}^t\mathrm{J}\,\mathrm{J} = \mathrm{I}_n$, donc $\mathrm{J}^{-1} = {}^t\mathrm{J} = -\mathrm{J}$. De ceci on obtient $\mathrm{M}\,(-\mathrm{J})\;{}^t\mathrm{M} = (-\mathrm{J})$ et alors :

$$\boxed{{}^t\mathrm{M}\text{ est symplectique.}}$$

2.a On calcule le produit par blocs :

$$\begin{aligned}{}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} &= \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{B} & {}^t\mathrm{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} -{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} + {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{A} & -{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} + {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} \\ -{}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C} + {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{A} & -{}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D} + {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice M est symplectique si et seulement si ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} + {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{A} = 0 \\ -{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} + {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} = -\mathrm{I}_m \\ -{}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C} + {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{A} = \mathrm{I}_m \\ -{}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D} + {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B} = 0 \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} = {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{A} = {}^t\left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C}\right) \\ {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D} = {}^t\mathrm{D}\,\mathrm{B} = {}^t\left({}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D}\right) \\ {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} = \mathrm{I}_m \end{cases}$$

En effet, les deux systèmes sont équivalents puisque les deuxième et troisième lignes du premier sont obtenues par transposition l'une de l'autre et sont donc redondantes. On a bien M symplectique si et seulement si les matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ vérifient les conditions :

$$\boxed{\begin{cases} {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C}\text{ et }{}^t\mathrm{B}\,\mathrm{D}\text{ sont symétriques} \\ {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{D} - {}^t\mathrm{C}\,\mathrm{B} = \mathrm{I}_m \end{cases}}$$

2.b Soit Q une matrice carrée d'ordre m. On calcule le produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & \mathrm{Q} \\ 0 & \mathrm{I}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A}-\mathrm{Q}\mathrm{C} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{Q}\mathrm{D} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$$

La matrice M peut donc s'écrire sous la forme voulue si l'on peut trouver Q telle que $\mathrm{Q}\mathrm{D} = \mathrm{B}$. Lorsque D est inversible, il suffit de poser $\mathrm{Q} = \mathrm{B}\mathrm{D}^{-1}$ pour avoir :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & \mathrm{B}\mathrm{D}^{-1} \\ 0 & \mathrm{I}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{A}-\mathrm{B}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{C} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$$

d'où
$$\det(\mathrm{M}) = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_m & \mathrm{B}\mathrm{D}^{-1} \\ 0 & \mathrm{I}_m\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathrm{A}-\mathrm{B}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{C} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{vmatrix}$$

Soit, comme $\begin{vmatrix} \mathrm{I}_m & \mathrm{B}\mathrm{D}^{-1} \\ 0 & \mathrm{I}_m\end{vmatrix} = 1$:

$$\det(\mathrm{M}) = \det\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{C}\right)\det(\mathrm{D})$$

Et comme $\det(\mathrm{D}) = \det\left({}^t\mathrm{D}\right)$, on obtient :