Mines Maths 1 PC 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par François Michel (École Polytechnique) ; il a été relu par Benoît Chevalier (ENS Ulm) et David Lecomte (ENS Cachan).

Ce long sujet d'algèbre est composé de quatre parties et quelques questions préliminaires classiques. On y aborde des notions fondamentales du programme d'algèbre de classes préparatoires, sans faire intervenir les méthodes de réduction d'endomorphismes.

On travaille sur les espaces vectoriels $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sauf dans les questions préliminaires. Le but du problème est de rechercher des réels λ pour lesquels on peut trouver un endomorphisme g de l'un de ces deux espaces tel que $g \circ g = \lambda \mathrm{Id} + \mathrm{D} \quad (*)$, où D désigne l'opérateur de dérivation.

Les questions préliminaires permettent d'introduire une propriété classique des endomorphismes nilpotents grâce à la « suite de noyaux itérés ».

- Dans la première partie, on détermine les sous-espaces stables par g et l'on élimine le cas $\lambda < 0$ avant de construire une base adaptée au traitement matriciel du problème. On parvient, grâce à ces résultats, à résoudre le problème suivant : trouver les matrices réelles G carrées d'ordre 3 vérifiant $\mathrm{G}^2 = \mathrm{A}_1$ où
$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- L'objet de la deuxième partie est d'étudier le cas où λ est nul en partant des propriétés des endomorphismes g et D.
- Dans la troisième partie, indépendante des deux précédentes, on construit directement un endomorphisme solution de $(*)$ à partir d'une somme de matrices. On retrouve finalement les matrices G obtenues au cours de la première partie.
- Enfin, la quatrième partie, également indépendante des précédentes, débute par l'étude d'un développement en série entière. Les coefficients de celui-ci interviennent ensuite dans la définition d'une solution de $(*)$. On termine une nouvelle fois en retrouvant les matrices G solutions de l'équation $\mathrm{G}^2 = \mathrm{A}_1$.

Indications

Préliminaires

b Démontrer par une unique récurrence les propriétés

$$\forall q \in \mathbb{N},\ q \geqslant p \quad \begin{cases} \operatorname{Ker} f^q = \operatorname{Ker} f^{q+1} \\ \operatorname{Ker} f^q = \operatorname{Ker} f^p \end{cases}$$

Montrer que la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est réelle, croissante et majorée ; en déduire qu'elle converge. Utiliser ensuite le fait que cette suite prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Première partie

I-1.a Pour montrer que g et D_n commutent, comparer ce que l'on obtient en composant $g^2 = \lambda \operatorname{id}_{\mathrm{E}_n} + \mathrm{D}_n$ par g, soit à gauche, soit à droite.

I-1.c Pour montrer que D_F est nilpotent, chercher $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}_q$ et en déduire que ${\mathrm{D}_\mathrm{F}}^{q+1} = 0$. L'unique sous-espace vectoriel G de E de dimension infinie et stable par D est E lui-même (raisonner par l'absurde).

I-2.a Comme $\dim \mathrm{E}_0 = 1$, $g \in \mathrm{L}(\mathrm{E}_0)$ est de la forme $g = \gamma \operatorname{id}_{\mathrm{E}_0} \ldots$

I-3.a Choisir y tel que $f^n(y) \neq 0$. Montrer par récurrence que B est libre.

I-3.b Appliquer le résultat de la question précédente à $f = \mathrm{D}_n$.

I-4.a Se donner les coefficients de $\operatorname{Mat}_{\mathrm{B}_2}(h) = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$; exprimer la relation $h \circ \mathrm{D}_2 = \mathrm{D}_2 \circ h$ sous forme matricielle.

I-4.b Montrer que $g \in \mathrm{L}(\mathrm{E}_2)$ vérifie la relation

$$g^2 = \lambda \operatorname{id}_{\mathrm{E}_2} + \mathrm{D}_2$$

si, et seulement si, il existe trois réels a, b et c solutions du système

$$\begin{cases} a^2 = \lambda \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases}$$

et tels que g puisse s'écrire

$$g = a \operatorname{id}_{\mathrm{E}_2} + b\,\mathrm{D}_2 + c\,(\mathrm{D}_2)^2$$

Deuxième partie

II-1.a Pour obtenir l'inégalité $\dim \operatorname{Ker} g^2 \geqslant 2$, montrer en raisonnant par l'absurde que $\operatorname{Ker} g \neq \{0\}$ puis que $\operatorname{Ker} g \neq \operatorname{Ker} g^2$.

II-1.b Raisonner par l'absurde et chercher une contradiction sur $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{D}_n$.

II-2.a Montrer dans cet ordre que D, D^m, g^k et g sont surjectifs.

II-2.d Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ vérifiant $g^k = \mathrm{D}^m$ si et seulement si k divise m.

Troisième partie

III-1.a Montrer que $(\mathrm{I}_{n+1} + t\,\mathrm{D}_n)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k\,{\mathrm{D}_n}^k$.

III-1.b Dériver la relation $(\mathrm{I}_{n+1} + t\,\mathrm{D}_n)\,(\mathrm{I}_{n+1} + t\,\mathrm{D}_n)^{-1} = \mathrm{I}_{n+1}$ par rapport à $t \in \mathbb{R}$.

III-1.c Remarquer que $\mathrm{L}_n(t) = \mathrm{D}_n \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dfrac{t^{k+1}}{k+1}\,{\mathrm{D}_n}^k \right)$.

III-2.a Utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(u+v)^k$ dans l'expression de $\varphi_{u+v}(t)$.

III-2.c Déduire de la question précédente que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{D}_n\,\varphi_1(t) = (\mathrm{I}_{n+1} + t\,\mathrm{D}_n)\;\varphi_1'(t)$$

et dériver cette relation par rapport à t.

III-3.a Utiliser successivement les résultats des questions III-2.c et III-2.a pour obtenir les matrices $\pm\sqrt{\lambda}\,\varphi_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Quatrième partie

IV-1.b Appliquer la méthode de l'équation différentielle, sans oublier d'utiliser l'unicité de la solution de l'équation différentielle établie à la question IV-1.a avec une condition initiale donnée.

Montrer par récurrence que les b_p sont données par

$$b_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad b_p \;=\; (-1)^p\, \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} (2p - 2k - 1)}{2^p\, p!}$$

IV-1.c Développer la série $h(x)^2$ par un produit de Cauchy et reconnaître les coefficients c_n.

IV-2.a Utiliser le fait que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E},\, \forall q \in \mathbb{N},\, q \geqslant d^\circ(\mathrm{P}) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}(\mathrm{P}) = \sum_{p=0}^{q} \frac{b_p}{\lambda^p} \mathrm{D}^p(\mathrm{P})$$

Préliminaires

Noyaux itérés

a Comme $f \in \mathrm{L}(\mathrm{V})$, pour tout entier naturel k,

- $\mathrm{Ker}\ f^k$ est bien un sous-espace vectoriel de V et
- pour tout $x \in \mathrm{Ker}\ f^k$, $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$

d'où $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Ker}\ f^k \subset \mathrm{Ker}\ f^{k+1}}$$

b Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\ f^p = \mathrm{Ker}\ f^{p+1}$. On procède alors par récurrence : pour tout entier $q \geqslant p$, on note $\mathscr{P}(q)$ la propriété

$$\mathrm{Ker}\ f^{q+1} = \mathrm{Ker}\ f^q = \mathrm{Ker}\ f^p$$

- $\underline{\mathscr{P}(p)}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathscr{P}(q) \Longrightarrow \mathscr{P}(q+1)}$: comme $\mathrm{Ker}\ f^{q+1} = \mathrm{Ker}\ f^p$ d'après $\mathscr{P}(q)$, il reste à montrer que $\mathrm{Ker}\ f^{q+1} = \mathrm{Ker}\ f^{q+2}$. On procède par double inclusion.
  - D'après la question précédente, $\mathrm{Ker}\ f^{q+1} \subset \mathrm{Ker}\ f^{q+2}$.
  - Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ f^{q+2}$.

    Par définition, $$f^{q+2}(x) = 0$$

    soit $$f^{q+1} \circ f(x) = 0$$

    ou encore $$f(x) \in \mathrm{Ker}\ f^{q+1} = \mathrm{Ker}\ f^q \qquad \text{(d'après } \mathscr{P}(q))$$

    Par suite, $$f^q \circ f(x) = 0$$

    ie $$x \in \mathrm{Ker}\ f^{q+1}$$

    d'où $$\mathrm{Ker}\ f^{q+2} \subset \mathrm{Ker}\ f^{q+1}$$

  Finalement, on obtient l'égalité $\mathrm{Ker}\ f^{q+2} = \mathrm{Ker}\ f^{q+1} = \mathrm{Ker}\ f^p$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(q+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion :</u> $\mathscr{P}(q)$ est vraie pour tout $q \geqslant p$.

$$\boxed{\left(\exists p \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Ker}\ f^p = \mathrm{Ker}\ f^{p+1}\right) \quad \Longrightarrow \quad (\forall q \in \mathbb{N},\ q \geqslant p \quad \mathrm{Ker}\ f^q = \mathrm{Ker}\ f^p)}$$

Supposons que V soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, la suite $(\dim \mathrm{Ker}\ f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie, réelle et croissante. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inclusion $\mathrm{Ker}\ f^k \subset \mathrm{V}$ entraîne l'inégalité $\dim \mathrm{Ker}\ f^k \leqslant n$: cette suite est majorée. Elle converge donc. En outre, étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est même constante à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$.

Montrons que ce rang p vérifie $p \leqslant n$. C'est bien le cas si $p = 0$. Supposons donc p non nul. D'après ce qui précède, p est le premier rang pour lequel on a l'égalité $\mathrm{Ker}\ f^p = \mathrm{Ker}\ f^{p+1}$, ce qui implique

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \leqslant p-1 \qquad \mathrm{Ker}\ f^k \subsetneq \mathrm{Ker}\ f^{k+1}$$

d'où $$\forall k \in \mathbb{N},\ k \leqslant p-1 \qquad \dim \mathrm{Ker}\ f^{k+1} \geqslant \dim \mathrm{Ker}\ f^k + 1$$