Mines Physique 1 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (ENS Ulm), Olivier Choffrut (Mines de Paris) et Stéphane Ravier (ENS Lyon) ; il a été relu par Yannick Alméras (professeur en CPGE).

Ce sujet traite de la modélisation théorique et des difficultés pratiques posées par l'ouvrage « De la Terre à la Lune » de Jules Verne. Il se subdivise en six parties largement indépendantes :

- la partie A sert de préliminaire ;
- la partie B modélise le trajet d'un boulet tiré vers la Lune en négligeant l'influence de celle-ci ;
- la partie C introduit l'effet de la Lune et le modèle de la sphère d'influence ;
- la partie D modélise l'influence de l'atmosphère terrestre sur le boulet ;
- la partie E étudie le canon permettant de tirer le boulet ;
- la partie F tente une légère approche du problème à trois corps.

Ce sujet, bien que calculatoire par endroits, reste très intéressant et montre notamment les cohérences et incohérences de morceaux choisis de l'œuvre de Jules Verne. Il est amusant de constater qu'un autre ouvrage de Jules Verne, « Voyage au centre de la Terre », a inspiré un sujet du même type tombé au même concours en 1995 (option P′, deuxième épreuve).

La relation fondamentale de la dynamique, la conservation de l'énergie et quelques aspects de la thermodynamique sont utilisés pour répondre aux questions posées.

Indications

3 Utiliser la conservation de l'énergie mécanique, sachant que l'on néglige la rotation de la Terre et l'attraction des autres astres.

5 Faire le bilan d'énergie entre les positions x et $x = \mathrm{D}$ pour qu'intervienne $\mathrm{V(D)}$. Il faut séparer les variables et intégrer pour faire apparaître la fonction $f(\psi)$.

7 Il faut effectuer soigneusement des approximations successives compte tenu de $\mathrm{R_T}/d \ll 1$ et $r/d \ll 1$. Le comportement de la fonction Arcsin au voisinage de 1^- pour des angles inférieurs à $\pi/2$ est utile :

$$\mathrm{Arcsin}\,(1-\varepsilon) \simeq \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\,\varepsilon} \qquad \text{avec} \qquad 0 < \varepsilon \ll 1$$

9 Que représente physiquement le centre d'équigravité pour un objet de masse quelconque ?

10 Écrire la conservation de l'énergie mécanique entre $\mathrm{R_T}$ et $x < d$ quelconque.

11 Raisonner par analogie avec la question 10.

13 Utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

14 La méthode de calcul est la même que pour la question 13.

15 On peut négliger a priori la température initiale du boulet devant sa température finale.

16 Faire attention aux signes.

19 Il faut minimiser la fonction $\mathrm{X(X_0)}$.

20 Même démarche que pour les deux questions précédentes.

22 Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour la Terre et le boulet.

23 Raisonner par analogie formelle avec la question 22.

A. Préliminaires

1 On se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On lui attache un repère de centre $\mathrm{O_T}$, le centre de la Terre. Soit un objet de masse μ, repéré depuis $\mathrm{O_T}$ par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathrm{O_T M}} = r\,\overrightarrow{u_r}$. Il n'est soumis qu'à son poids dû à la force attractive de la Terre. Si l'objet est placé à la surface de la Terre, on a

$$-\mu\,\frac{\mathrm{G\,M_T}}{\mathrm{R_T}^2}\,\overrightarrow{u_r} = \mu\,\overrightarrow{g}$$

Or $$\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_r}$$

d'où $$\boxed{g = \frac{\mathrm{G\,M_T}}{\mathrm{R_T}^2}}$$

La Lune suit une orbite circulaire de rayon d autour de la Terre. Son accélération radiale vaut, par conséquent,

$$\overrightarrow{a_r} = -\frac{v^2}{d}\,\overrightarrow{u_r} = -\omega^2\,d\,\overrightarrow{u_r}$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la Lune de masse m donne alors

$$m\,\overrightarrow{a_r} = -m\,\frac{\mathrm{G\,M_T}}{d^2}\,\overrightarrow{u_r} \qquad \text{soit} \qquad -m\,\omega^2\,d = -m\,\frac{\mathrm{G\,M_T}}{d^2}$$

Or $$\omega = \frac{2\,\pi}{\mathrm{T_T}(d)}$$

d'où $$\boxed{\mathrm{T_T}(d) = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{\mathrm{G\,M_T}}}}$$

Comme $$\mathrm{G\,M_T} = g\,\mathrm{R_T}^2$$

on a aussi $$\boxed{\mathrm{T_T}(d) = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{\mathrm{R_T}}{g}\left(\frac{d}{\mathrm{R_T}}\right)^3}}$$

Application numérique : $\boxed{\mathrm{T_T}(d) = 2,37.10^6\ \mathrm{s} \simeq 27,4\ \text{jours}}$

> Ce résultat est en accord avec la valeur de $27,32$ jours donnée par l'énoncé, l'hypothèse d'une orbite lunaire circulaire étant justifiée par la faible excentricité de sa trajectoire réelle ($e = 0,055$).
>
> Par ailleurs, on peut noter que l'on retrouve la loi de Kepler, à savoir $\mathrm{T}^2/a^3 = \mathrm{C^{te}}$ où a est le demi-grand axe de l'orbite considérée (ici, $d = a$).

B. En négligeant la gravitation lunaire

2 L'énergie mécanique E du boulet de masse μ se décompose en énergie cinétique et énergie potentielle d'interaction terrestre, et s'écrit donc dans le référentiel géocentrique

$$\mathrm{E} = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p}$$

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \mu\,\frac{\mathrm{G\,M_T}}{x}$$

Comme $$\mathrm{G\,M_T} = g\,\mathrm{R_T}^2$$

on a $$\boxed{\mathrm{E} = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \mu\,\frac{g\,\mathrm{R_T}^2}{x}}$$

3 En l'absence de forces extérieures et intérieures non conservatives, l'énergie mécanique du boulet se conserve. En particulier, entre les situations $x = \mathrm{R_T}$ et x tendant vers l'infini :

$$\mathrm{E(R_T)} = \mathrm{E}(\infty)$$

avec $$\mathrm{E}(\infty) = \mathrm{E_c}(\infty) + \mathrm{E_p}(\infty) = \mathrm{E_c}(\infty)$$

puisque l'énergie potentielle est nulle à l'infini par convention. Supposons que l'on communique la vitesse $v(\mathrm{R_T})$ au boulet au niveau de la surface terrestre, en $x = \mathrm{R_T}$; alors la conservation de l'énergie mécanique donne

$$\frac{1}{2}\,\mu\,v^2(\mathrm{R_T}) - \mu\,g\,\mathrm{R_T} = \mathrm{E_c}(\infty)$$

Comme l'énergie cinétique est nécessairement positive ou nulle, on en déduit

$$\boxed{v \geqslant \mathrm{V}_\infty = \sqrt{2\,g\,\mathrm{R_T}} = 11,19\ \mathrm{km.s^{-1}}}$$

La vitesse de libération correspond à une vitesse du boulet nulle à l'infini et sa valeur est en accord avec celle donnée par l'énoncé.

> Il faut faire bien attention aux notations de l'énoncé qui peuvent paraître déroutantes : V_∞ ne désigne pas une vitesse limite mais bien une vitesse à communiquer au boulet en $x = \mathrm{R_T}$ pour qu'il s'échappe. Dans la question suivante, V(D) ne désigne pas non plus la vitesse en $x = \mathrm{D}$ mais bel et bien la vitesse minimale à donner en $x = \mathrm{R_T}$ pour atteindre D. Les V sont donc des valeurs particulières de $v(\mathrm{R_T})$.

4 Dans le référentiel géocentrique, la conservation de l'énergie mécanique du boulet entre $x = \mathrm{R_T}$ et $x = \mathrm{D}$ s'écrit :

$$\mathrm{E(R_T)} = \mathrm{E(D)}$$

d'où $$\frac{1}{2}\,\mu\,v^2(\mathrm{R_T}) - \mu\,g\,\mathrm{R_T} = \frac{1}{2}\,\mu\,v^2(\mathrm{D}) - \mu\,\frac{g\,\mathrm{R_T}^2}{\mathrm{D}}$$

$$\frac{1}{2}\,\mu\,v^2(\mathrm{R_T}) = \frac{1}{2}\,\mu\,v^2(\mathrm{D}) + \mu\,g\,\mathrm{R_T}^2\left(\frac{1}{\mathrm{R_T}} - \frac{1}{\mathrm{D}}\right) \geqslant \mu\,g\,\mathrm{R_T}^2\left(\frac{1}{\mathrm{R_T}} - \frac{1}{\mathrm{D}}\right)$$