X Maths 1 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Starynkévitch (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Perrier (ENS Lyon) et Olivier Schmitt (École Polytechnique).

Comme souvent au concours de Polytechnique, ce problème étudie un sujet *a priori* inaccessible en premier cycle (à savoir l'étude de fonctions propres d'un opérateur différentiel sur une variété riemannienne) – la démarche de l'énoncé rendant bien sûr le sujet accessible à un bon élève de classes préparatoires.

Ce sujet fait un large tour d'horizon du programme des classes préparatoires : on y parle surtout d'analyse sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, mais aussi de géométrie, d'action de groupe et d'applications linéaires sur des espaces de fonctions.

Un certain nombre de questions sont relativement simples et pourraient se rencontrer dans tous les concours (1, 2, 3, 5, 12, 13). D'autres sont assez typiques de ce concours en particulier (4, 6, 7, 8, 11, 15) parmi lesquelles certaines nécessitent un certain recul (10, 14). Une question est très difficile (9).

La première partie étudie une équation différentielle linéaire à un paramètre réel, avec recherche de solutions développables en série entière, afin d'établir les solutions d'une autre équation de ce type. La seconde partie établit et utilise des propriétés d'une action de groupe sur un demi-plan. Enfin, la troisième partie étudie un opérateur différentiel sur ce demi-plan.

Indications

Première partie

4 Montrer entre autres que la limite de $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ est uniforme sur tout compact. Construire ensuite une famille de compacts de S, $(\mathrm{K}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ recouvrant S : $\bigcup\limits_{\varepsilon>0} \mathring{\mathrm{K}}_\varepsilon = \mathrm{S}$. Étudier ensuite la convergence normale de la série $\sum a_n(s)\, x^n$ sur $\mathrm{K}_\varepsilon \times [\,-1+\varepsilon\,;1-\varepsilon\,]$.

5.b Remarquer que $(\mathrm{E}'_s) = (\mathrm{E}'_{1-s})$.

Deuxième partie

6.c Montrer que $2\,(\mathrm{Im}\ z)\ c(\mathrm{A}_\theta(z)) = |z|^2 + 1$. Le calcul sera beaucoup plus simple.

6.d Utiliser la question 6.b.

7.a Utiliser la question 6.c, puis (pour le calcul restant) adapter l'indication 6.c à cette question.

7.b Utiliser le théorème de relèvement pour une fonction qui dépend de A_θ de façon affine, et à valeurs dans $\mathbb{U}$.

8.a Si le sens de la question n'est pas compris, lire la remarque dans le texte.

8.b Utiliser la question 7.b habilement permet de répondre aux deux assertions d'un coup.

Troisième partie

9 Cette question est bien difficile et serait davantage attendue dans une épreuve d'ENS. Peut-être la sauter dans un premier temps (seul le résultat donné par l'énoncé est utile par la suite). Dans un second temps, lire la première remarque du corrigé.

10 La difficulté principale est de comprendre ce que l'on fait. Quand on manipule un objet de l'énoncé, il faut bien savoir ce que c'est.

11 Pour le début de la question, s'inspirer d'un théorème vu en cours dans le cas d'une variable. Pour la fin, commencer par calculer $\mathrm{D}\omega$, les idées viendront alors.

13 Tourner la page de l'énoncé, une indication est donnée ! (Ainsi, ce genre de blagues arrive aux concours : penser donc à regarder en haut de la page suivante quand on arrive en bas d'une page – dans le même ordre d'idée, rappelons qu'il est toujours utile, et donc vivement conseillé, de lire l'intégralité de l'énoncé d'un problème). Faire ensuite les changements de variable $v = \dfrac{u}{t}$, puis $w = \dfrac{1}{v}$.

14 En considérant $\mathrm{F}_s : (t,\theta) \mapsto \mathrm{F}_s(t)$ comme élément de $\mathcal{C}^\infty(]\,0\,;1\,[\times\mathbb{R})_{\mathrm{per}}$, montrer que $\mathrm{F}_s = \mathrm{V}(\varphi_s)$

15 Chercher de deux manières un équivalent de F_s.

Première partie

1 Cherchons une solution de (E_s) sous la forme d'une série entière de rayon de convergence non nul $f_s(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(s)\, x^n$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de définition, ses dérivées successives s'obtenant en dérivant termes à termes.

Ainsi $$f_s{}'(x) = \sum_{n\geqslant 1} na_n(s)\, x^{n-1}$$

$$f_s{}''(x) = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n(s)\, x^{n-2}$$

$$2x(1-x)f_s{}''(x) + (2s+1-(2s+3)x))\, f_s{}'(x) - sf_s(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n\geqslant 2} 2n(n-1)a_n(s)\, x^{n-1} - \sum_{n\geqslant 2} 2n(n-1)a_n(s)\, x^n \\
&\qquad + \sum_{n\geqslant 1} (2s+1)na_n(s)\, x^{n-1} - \sum_{n\geqslant 1} (2s+3)na_n(s)\, x^n - \sum_{n\geqslant 0} sa_n(s)\, x^n \\
&= \sum_{k\geqslant 0} 2(k+1)ka_{k+1}(s)\, x^k - \sum_{k\geqslant 0} 2k(k-1)a_k(s)\, x^k \\
&\qquad + \sum_{k\geqslant 0} (2s+1)(k+1)a_{k+1}(s)\, x^k - \sum_{k\geqslant 0} (2s+3)ka_k(s)\, x^k - \sum_{k\geqslant 0} sa_k(s)\, x^n \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \left((k+1)(2k+2s+1)a_{k+1}(s) + (-2k(k-1) - k(2s+3) - s)a_k(s)\right)\, x^k
\end{aligned}$$

L'unicité du développement en série entière induit que f_s est solution de (E_s) si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)(2n+2s+1)a_{n+1}(s) - (2n(n-1) + n(2s+3) + s)a_n(s) = 0$$

Comme $s \in \mathrm{S}$ $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n+2s+1) \neq 0$$

Finalement, f_s est solution de (E_s) si et seulement si :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1}(s) = \frac{s+n(2s+3)+2n(n-1)}{(n+1)(2n+2s+1)}a_n(s)}$$

2 L'énoncé semble admettre la non nullité des $a_n(s)$ si s n'est pas un entier négatif ou nul. Nous allons quand même la vérifier et même, plus précisément, déterminer à quelle condition sur s, $a_n(s)$ est nul (ce qui nous servira pour la question 3).

Tout d'abord, il est clair que si $a_k(s) = 0$, alors $a_{k+1}(s) = 0$ (et par récurrence immédiate, $a_n(s) = 0$ pour $n \geqslant k$).

Cherchons donc les couples (s,k) pour lesquels $a_k(s) \neq 0$ et $a_{k+1}(s) = 0$.

Ceci nécessite $$s + k(2s+3) + 2k(k-1) = 0$$

Soit $$s(2k+1) = -3k - 2k(k-1)$$

ou encore $$s(2k+1) = -2k^2 - k$$

et enfin $$s = -k$$

De fait, comme $a_0(s) = 1 \neq 0$ une récurrence immédiate prouve que :

- si $-s \in \mathbb{N}$, alors : $\qquad a_n(s) = 0 \iff n \geqslant -s$;
- si $-s \notin \mathbb{N}$, alors : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n(s) \neq 0$.

On a alors
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)} &= \frac{2n^2 + (2s+1)n + s}{2n^2 + (2s+3)n + (2s+1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^2}{2n^2} \\ \frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)} &\underset{n\to+\infty}{\sim} 1\end{aligned}$$

Donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)} = 1}$$

3 D'après ce qui a été dit à la question 2, si $-s \in \mathbb{N}$, alors f_s est une fonction polynomiale de degré $-s$ (donc de rayon de convergence infini). Si $-s \notin \mathbb{N}$, alors d'après la question 2, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)} \right| = 1$$

La règle de D'Alembert nous dit que f_s a pour rayon de convergence $\dfrac{1}{1} = 1$.

Dans tous les cas, la somme $f_s(x)$ de la série existe bien, sur $]-1,1[$ ou sur $\mathbb{R}$, et les calculs faits à la question 1 sont justifiés. La fin de ces calculs donnant 0, ceci montre bien que f_s est effectivement solution de (E_s).

> C'est pour cette raison que, dans l'exposé de la première question, nous n'avions pas supposé *a priori* que f_s était dès le départ une solution.

4 On notera $\widetilde{f}$ la fonction $(s,x) \mapsto f_s(x)$.

> Nous allons considérer une famille de compacts de $\mathrm{S} \times]-1\,;1\,[$, $(\mathrm{K}'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, telle que $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0} \overset{\circ}{\mathrm{K}}_\varepsilon = \mathrm{S}$. Nous montrerons, en utilisant des arguments de convergence normale de la série, que $\widetilde{f}$ est continue sur K_ε pour tout $\varepsilon > 0$, et le caractère local de la continuité permettra de conclure.

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\quad \mathrm{K}_\varepsilon = \left\{ s \in \mathrm{S} \;\middle|\; |s| \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| x - n - \dfrac{1}{2} \right| \geqslant \varepsilon \right\}$

et
$$\mathrm{K}'_\varepsilon = \mathrm{K}_\varepsilon \times [\,-1+\varepsilon\,;1-\varepsilon\,]$$

Nous avons alors
$$\overset{\circ}{\mathrm{K}'_\varepsilon} = \left\{ (s,x) \in \mathrm{S} \times]-1+\varepsilon\,;1-\varepsilon\,[\;\middle|\; |s| < \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \in \mathbb{N}, \left| x - n - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon \right\}$$

et donc
$$\bigcup_{\varepsilon>0} \overset{\circ}{\mathrm{K}'_\varepsilon} = \mathrm{S} \times]-1\,;1\,[$$