Mines Maths 2 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Beck (ENS Cachan) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Ce problème comporte deux parties. La deuxième n'utilise les résultats de la première que pour la dernière question : on peut donc traiter indépendamment ces deux parties.

Dans tout le problème, on étudie l'approximation des fonctions continues par des polynômes (sur $[-1,1]$). Dans la première partie, on utilise des méthodes dites de convolution. À l'aide d'intégrales à paramètres, on construit à partir d'une fonction f une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f et on s'en sert pour obtenir un résultat sur la rapidité de convergence.

Dans la seconde partie, on construit à l'aide d'un endomorphisme une suite de polynômes (P_n) qui sont ses vecteurs propres. On montre que ces polynômes sont orthogonaux pour un certain produit scalaire afin d'en déduire qu'ils sont tous scindés à racines simples. Enfin, on montre qu'en interpolant f aux racines de ces polynômes, on obtient une suite (Q_n) de polynômes qui converge uniformément vers f.

Indications

Partie I

I.1.a Remarquer que si $h \leqslant h'$ alors :

$$\{(x,y),\ |x-y| \leqslant h\} \subset \{(x,y),\ |x-y| \leqslant h'\}$$

I.1.b Prendre $x \leqslant y$ tels que $y - x \leqslant h + h'$. Choisir un élément z dans $[x, y]$ et appliquer l'inégalité triangulaire. Passer ensuite à la borne supérieure.

I.1.c Revenir aux définitions.

I.1.d Utiliser le théorème des accroissements finis.

I.2.a Remarquer que $\lambda_n \mathrm{K}_n = n^2 \mathrm{F}_n^2$ et utiliser l'expression de F_n sous la forme d'un polynôme trigonométrique pour calculer l'intégrale de K_n sur $[\,0, 2\pi]$.

I.2.b Utiliser le développement limité de sin en 0.
Faire le changement de variable $u = nt$ pour les intégrales.

I.2.c Séparer l'intégrale en $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{K}_n(t)\ \mathrm{d}t + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi n\,t\,\mathrm{K}_n(t)\ \mathrm{d}t$ et exprimer le deuxième terme en fonction de I_n, J_n et λ_n.

I.3.a Attention à l'erreur d'énoncé, il faut montrer que $j_n[g]$ est un polynôme trigonométrique. Montrer pour cela d'une part que K_n en est un et, d'autre part, que $j_n[g](\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{K}_n(\theta - t)\, g(t)\ \mathrm{d}t$.

I.3.b Utiliser d'abord la question I.1.b puis remplacer $g(\theta)$ sous la valeur absolue par $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{K}_n(t)\ \mathrm{d}t$ puisque $\mathrm{K}_n(t)$ est de valeur moyenne égale à 1.

I.4.a Utiliser le fait que $j_{p+1}[g]$ est un polynôme trigonométrique pair pour montrer qu'il s'écrit comme une somme finie de fonctions cos.

I.4.b Par définition de la borne inférieure, $\Delta_n(f)$ est plus petit que $||f - \mathrm{P}_n||$. Utiliser alors la définition de P_n et la question I.3.b.

I.4.c Utiliser un polynôme $\mathrm{P}_{f'}$ tel que $\Delta_{n-1}(f') = ||\,f' - \mathrm{P}_{f'}||$. Prendre l'une de ses primitives P_1 et appliquer les questions I.4.b et I.1.d à $f - \mathrm{P}_1$.

I.4.d Raisonner par récurrence sur k.

Partie II

II.1.a Montrer que E_n^0 est l'intersection des noyaux de deux formes linéaires pour déterminer sa dimension.

Montrer que la famille (e_k) est libre par un argument sur les degrés de ces polynômes.

II.1.b Exprimer $\Phi_n(e_k)$ en fonction de e_k et e_{k-2} pour montrer que la matrice M_n est triangulaire supérieure.

Remarquer ensuite que les éléments diagonaux sont tous distincts et en déduire que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

II.1.c Décomposer l'un des polynômes P ou Q suivant la base des (Q_k) et utiliser l'équation différentielle vérifiée par Q_k.

II.1.d Considérer Q_k et $Q_{k'}$ deux éléments de la base. Calculer de deux manières différentes leur produit scalaire en utilisant chacune des équations différentielles vérifiées par ces polynômes et des intégrations par parties.

II.2.a Poser $Q = P\,(1-x^2)$ et remarquer que Q appartient à E_{n-1}^0.

II.2.b.i Montrer que le polynôme $R_1\,Q$ est de signe constant sur $[\,-1,1]$.

II.2.b.ii Montrer de même que, sous ces hypothèses, Q_n est de signe constant sur l'intervalle $[\,-1,1]$.

II.3.a Pour l'injectivité, utiliser le théorème selon lequel un polynôme non nul de degré n a au plus n racines. Raisonner sur les dimensions pour la surjectivité.

II.3.b Pour calculer $L_k(y_k)$, montrer que

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{l\neq k}(x-y_l)}{\prod\limits_{l\neq k}(y_k-y_l)}$$

Utiliser l'unicité du polynôme $I_n[f]$ pour conclure.

II.3.c Utiliser $I_n[f-P] = I_n[f]-P$ pour faire apparaître P puis utiliser la question II.3.b et majorer grossièrement la valeur absolue de la somme obtenue par la somme des valeurs absolues.

II.4.a Même raisonnement que pour la question II.3.a.

II.4.b Il faut montrer que $L'_k(y_k) = \dfrac{Q''_{n+1}(y_k)}{2Q'_{n+1}(y_k)}$.

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à Q_{n+1} en y_k et réinjecter le résultat dans la définition de L_k de la question II.3.b.

II.4.c Appliquer la formule de l'énoncé à $H_n[1]$.

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour démontrer la seconde inégalité à partir de la première.

II.5 Utiliser la question II.3.c, puis la question II.4.c. Enfin utiliser la question I.4.d.

Première partie

I.1 Propriétés du module de continuité

I.1.a φ est bornée. Soit donc $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad |\,\varphi(x)| \leqslant \mathrm{M}$$

On a alors $$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2 \quad |\,\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\mathrm{M}$$

Et donc $$\forall h > 0 \quad \sup\{|\,\varphi(x) - \varphi(y)|, |x-y| \leqslant h\} \leqslant 2\mathrm{M} < \infty$$

$\omega_\varphi(h)$ est donc bien définie pour tout h strictement positif.

Soient h, h' appartenant à $]0,+\infty[$ tels que $h \leqslant h'$. On a

$$\{(x,y),\, |x-y| \leqslant h\} \subset \{(x,y),\, |x-y| \leqslant h'\}$$

d'où $$\sup\ \{|\,\varphi(x) - \varphi(y)|, |x-y| \leqslant h\} \leqslant \sup\{|\,\varphi(x) - \varphi(y)|, |x-y| \leqslant h'\}$$

Soit finalement $$\boxed{\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')}$$

> Attention ! Il ne faut pas oublier de montrer que $\omega_\varphi(h)$ est bien définie pour répondre entièrement à la question.

I.1.b Soient $x, y \in \mathrm{I}^2$ et $h, h' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|x-y| \leqslant h + h'$. On suppose $x < y$. On peut alors choisir z dans $[x,y]$ tel que $z - x \leqslant h$ et $y - z \leqslant h'$.

Soit $$|\,\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\,\varphi(x) - \varphi(z)| + |\,\varphi(z) - \varphi(y)|$$

Puis $$|\,\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \sup\{|\,\varphi(x) - \varphi(z)|, |x-z| \leqslant h\} + \sup\{|\,\varphi(y) - \varphi(z)|, |y-z| \leqslant h'\}$$

Par conséquent,

$$\forall\,(x,y) \in \mathrm{I}^2 \quad |x-y| \leqslant h + h' \quad \Longrightarrow \quad |\,\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$$

Finalement, en passant au $\sup\{(x,y),\, |x-y| \leqslant h + h'\}$, on obtient

$$\boxed{\omega_\varphi(h+h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')}$$

La propriété $\omega_\varphi(n\,h) \leqslant n\,\omega_\varphi(h)$ se déduit alors facilement par récurrence sur n. L'autre inégalité est moins immédiate.

Soit $\lambda > 0$. On écrit $\lambda = \mathrm{E}(\lambda) + \{\lambda\}$ où $\mathrm{E}(\lambda)$ est la partie entière de λ. Alors,

$$\omega_\varphi(\lambda\,h) = \omega_\varphi((\mathrm{E}(\lambda) + \{\lambda\})\,h)$$
$$\omega_\varphi(\lambda\,h) \leqslant \omega_\varphi(\mathrm{E}(\lambda)\,h) + \omega_\varphi(\{\lambda\}\,h)$$