# Mines Maths 2 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Chomette (ENS Ulm) ; il a été relu par Brice Goglin (ENS Lyon) et Codrin Nichitiu (ENS Lyon).

---

Ce problème traite de l'étude des solutions de l'équation différentielle linéaire :

$$y''(t) + \phi(t)y(t) = 0$$

- Dans la première partie, on calcule la solution générale (sous la forme d'une série de Fourier) de cette équation dans le cas où $\phi(t) = e^{it}$.
- Les trois parties suivantes sont consacrées au cas $\phi(t) = e^t$.
  On y calcule là encore la solution générale, sous forme de série, puis l'on s'intéresse à la structure de l'ensemble des zéros de cette solution (théorie de Sturm).
- La cinquième partie, quant à elle, traite du comportement asymptotique des solutions de l'équation générale.

# Indications

## Première partie

I.1 Penser au théorème de Cauchy.

I.2.a Penser au théorème de Dirichlet.

I.3.a Faire deux intégrations par parties successives.

## Deuxième partie

II.1 Penser au critère d'Abel.

II.2 Utiliser le critère de Leibniz et l'optimiser en traitant parfois les premiers termes de la série à part.

## Troisième partie

III.1.b Obtenir une contradiction par l'étude des variations de W.

III.2.a Conduire un raisonnement par l'absurde rigoureux.

III.2.b Raisonner comme à la question III.1.b.

## Quatrième partie

IV.1.a Utiliser le critère de Cauchy uniforme.

IV.2 Montrer les résultats dans l'ordre où ils sont énoncés, en utilisant ceux déjà obtenus.

## Cinquième partie

V.2.a Partir à l'aventure en utilisant des raisonnements du type :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u)\,\mathrm{d}u$$

(Ne pas oublier de justifier la validité de cette expression.)

V.3.b Revenir à la définition de la limite.

## Première partie

**I.1** Si une solution $f$ de l'équation ($\mathbf{E_1}$) est $2\pi$-périodique, il en est de même pour sa dérivée (qui existe, la fonction étant nécessairement 2 fois dérivable). On a alors clairement

$$f(0) = f(2\pi) \qquad \text{et} \qquad f'(0) = f'(2\pi)$$

Inversement, si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$, alors alors la fonction $g : t \mapsto f(t+2\pi)$ est solution du problème de Cauchy :

$$y''(t) + e^{it}y(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} y(0) = f(0) \\ y'(0) = f'(0) \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy assure l'unicité de la solution à ce problème ; en conséquence, les fonctions $f$ et $g$ coïncident, c'est-à-dire que l'on a

$$\boxed{\forall t \qquad f(t) = f(t+2\pi)}$$

En d'autres termes, $f$ est $2\pi$-périodique.

**I.2.a** $f$ est une solution $2\pi$-périodique de l'équation ($\mathbf{E_1}$). En particulier, elle est 2 fois dérivable, donc de classe $\mathscr{C}^1$. Par le théorème de Dirichlet, $f$ est donc limite simple de sa série de Fourier, et on a bien

$$\boxed{\forall t \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int}}$$

**I.2.b** Pour toute fonction $f$ $2\pi$-périodique dérivable, on a $c_n(f') = i\,n\,c_n(f)$ (si l'on ne connaît pas ce résultat, il s'agit d'une simple intégration par parties).

On obtient donc $$c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$$

Par ailleurs, l'expression intégrale de $c_n(f'')$ est

$$c_n(f'') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

Mais comme $f''(t) = -e^{it}f(t)$, il vient

$$\begin{aligned} c_n(f'') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -e^{it}f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -f(t)e^{-i(n-1)t}\,\mathrm{d}t. \\ c_n(f'') &= -c_{n-1}(f). \end{aligned}$$

De ces deux expressions de $c_n(f'')$, on tire alors

$$\boxed{n^2 c_n(f) = c_{n-1}(f)} \qquad (\mathbf{1})$$

**I.2.c** La relation (**1**) appliquée à $n=0$ donne

$$0^2 c_0(f) = c_{-1}(f)$$

En particulier, $$\boxed{c_{-1}(f) = 0}$$

Par récurrence, la relation $n^2 c_n(f) = c_{n-1}(f)$ donne immédiatement

$$\boxed{\forall n < 0 \qquad c_n(f) = 0}$$

Pour ce qui est des coefficients positifs, nous allons montrer, toujours par récurrence, que

$$\forall n \geqslant 0 \qquad c_n(f) = \frac{1}{(n!)^2} c_0(f)$$

- Le résultat est immédiat au rang 0.
- Supposons-le vrai au rang $n$. On a

$$(n+1)^2 c_{n+1}(f) = c_n(f)$$

donc $$c_{n+1}(f) = \frac{c_n(f)}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n!)^2} c_0(f) \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{c_0(f)}{((n+1)!)^2}$$

grâce à l'hypothèse de récurrence.

- Le principe de récurrence permet de conclure que :

$$\forall n \geqslant 0 \qquad c_n(f) = \left(\frac{1}{(n!)^2}\right) c_0(f)$$

On peut alors exprimer la fonction $f$, solution de l'équation $(\mathbf{E_1})$, par

$$\boxed{f(t) = c_0(f) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} e^{int}}$$

**I.3.a** $$\mathrm{C} = f(t+h) - f(t) - hf'(t)$$

On reconnaît dans C le début du développement de Taylor de $f(t+h)$. $f$ étant solution de $(\mathbf{E_1})$, elle est 2 fois dérivable, donc continue, et comme $f''(t) = -e^{it} f(t)$, $f''$ est continue. En conséquence, $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ (et même $\mathscr{C}^\infty$ par une facile récurrence), et par suite $f'$ est primitive de $f''$, tout comme $f$ est primitive de $f'$. On peut donc écrire :

$$\mathrm{C} = \int_t^{t+h} \left(f'(u) - f'(t)\right)\,\mathrm{d}u = \int_t^{t+h} \int_t^u f''(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

On majore alors brutalement $|f''(v)|$ par $\|f''\|_\infty$. Comme de plus $f''(t) = -e^{it} f(t)$, on remarque alors que $\|f''\|_\infty = \|f\|_\infty$ . Il vient

$$|\mathrm{C}| \leqslant \int_t^{t+h} (u-t)\,\|f\|_\infty\,\mathrm{d}u \leqslant \left(\frac{h^2}{2}\right) \|f\|_\infty$$