Mines Maths 1 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Brice Goglin (ENS Lyon) ; il a été relu par Thomas Chomette (ENS Ulm) et Renaud Durand (ENS Ulm).

L'épreuve se compose d'un unique problème d'algèbre, dans le cadre des espaces vectoriels normés.

L'objet du problème est de donner une majoration précise de la valeur absolue du déterminant de Van der Monde associé à un vecteur dans un espace complexe. L'étude est d'abord réalisée en dimension 2, puis 3, et enfin généralisée en dimension quelconque.

Ce problème assez calculatoire requiert principalement des connaissances en algèbre des espaces normés, mais fait également appel à quelques notions d'algèbre bilinéaire, de topologie et d'analyse.

Indications

1. Définition du réel ρ

1.b Montrer que S est compacte.

3. Cas $n = 3$

3.a Étudier le signe de la dérivée seconde de ln.

3.a Pour le cas d'égalité, on peut par exemple introduire une relation de convexité sur deux des trois points, puis une deuxième relation sur le troisième point et le milieu du segment joignant les deux précédents.

3.d Utiliser l'inégalité obtenue à la question 3.a.

3.d Pour calculer ρ, supposer que la valeur obtenue est bonne puis étudier les cas d'égalité que cela impose.

4. Une minoration du réel ρ

4.a Faire apparaître une somme connue dans le développement d'un terme de la matrice produit.

5. Une inégalité de Hadamard

5.b Poser $\mathrm{M}(\mathrm{U}_i) = \mathrm{P} \times \mathrm{M}(\mathrm{V}_i)$, étudier la forme P et en déduire son déterminant.

5.b Pour montrer l'inégalité de Hadamard, appliquer le théorème de Pythagore aux vecteurs U_i et $\mathrm{proj}_{i-1}(\mathrm{V}_i)$.

6. Une majoration du réel ρ

6 Utiliser les vecteurs $\mathrm{V}_i = \big(1, \ldots, x_i^{n-1}\big)$.

7. Recherche des vecteurs W

7.b Optimiser la majoration utilisée entre les deux résultats du 6.

7.b Utiliser les vecteurs $\mathrm{V}_i = \big(\mathrm{W}_1^{i-1}, \ldots, \mathrm{W}_n^{i-1}\big)$.

7.d Dériver l'expression de $\mathrm{P_W}$ sous forme d'un produit pour obtenir une somme de produits.

7.e L'inverse d'un nombre complexe de module 1 est son conjugué.

7.f On pourra, par exemple, raisonner sur le terme de plus bas degré de $\mathrm{P'_W}$.

1. Définition du réel ρ

I.a Par définition, $\nu(\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

On a donc $$\nu(\lambda.\mathrm{X}) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda x_1 & \dots & \lambda^{n-1} x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda x_n & \dots & \lambda^{n-1} x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

En utilisant la n-linéarité du déterminant, il vient

$$\nu(\lambda.\mathrm{X}) = 1 \times \lambda \times \cdots \times \lambda^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \nu(\mathrm{X})$$

$$\boxed{\nu(\lambda.\mathrm{X}) = \lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \nu(\mathrm{X})}$$

Soit maintenant $\mathrm{Y} = \dfrac{\mathrm{X}}{\|\mathrm{X}\|}$, vecteur de norme 1 et colinéaire à X.

On a $$\boxed{\nu(\mathrm{X}) = \|\mathrm{X}\|^{\frac{n(n-1)}{2}} \nu(\mathrm{Y})}$$

I.b Notons f_i avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$ les applications qui à un vecteur X de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ associent le vecteur $f_i(\mathrm{X})$ de coordonnées $(x_1^i, \dots, x_n^i)$. ν est alors la composée de ces n applications et de l'application qui à n vecteurs associe leur déterminant.

Les n applications f_i sont clairement continues dans $\mathbb{C}^n$. En effet, on peut remarquer que $\|f_i(x-y)\| \leqslant \|x-y\|^i$. Le déterminant étant une forme multilinéaire, il est également continu par rapport à chacun des n vecteurs variables. La composée est donc continue.

$$\boxed{\nu \text{ est continue.}}$$

La sphère unité S de $\mathbb{C}^n$ est un fermé, car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application $\|\cdot\|$, qui est continue. Par ailleurs, cette sphère S est bornée. Comme on travaille dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les fermés bornés sont compacts. S est donc compacte. La fonction $|\nu|$ étant continue sur S, elle y admet un maximum.

$$\boxed{(\mathrm{X} \longmapsto |\nu(\mathrm{X})|) \text{ admet un maximum sur S.}}$$

I.c.i D'après la question I.a,

$$\nu(\mathrm{X}) = \|\mathrm{X}\|^{\frac{n(n-1)}{2}} \nu\left(\frac{1}{\|\mathrm{X}\|}\,\mathrm{X}\right)$$

Or $$\frac{1}{\|\mathrm{X}\|}\,\mathrm{X} \in \mathrm{S}$$

donc $$\left|\nu\left(\frac{1}{\|\mathrm{X}\|}\,\mathrm{X}\right)\right| \leqslant \rho$$

d'où $$\boxed{|\nu(\mathrm{X})| \leqslant \rho\,\|\mathrm{X}\|^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

I.c.ii Comme on l'a vu à la question I.b, $|\nu|$ admet un maximum ρ sur la sphère unité S de E_n. Il existe donc un vecteur $\mathrm{W} \in \mathrm{S}$ tel que $|\nu(\mathrm{W})| = \rho$.

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur unitaire } \mathrm{W} \in \mathrm{E}_n \text{ tel que } |\nu(\mathrm{W})| = \rho.}$$

2. Cas $n = 2$

Un vecteur X de coordonnées complexes (x, y) appartient à la sphère unité S de E_2 si et seulement si $\sup\{|x|, |y|\} = 1$.

Soit $$(x,y) \in \mathrm{S} \iff \begin{cases} |x| = 1 \text{ et } |y| \leqslant 1 \\ \text{ou} \\ |y| = 1 \text{ et } |x| \leqslant 1 \end{cases}$$

En notant $\mathbb{U}$ le groupe des complexes de module 1, et $\overline{\mathrm{B}}(0,1)$ la boule unité fermée (ensemble des complexes de module inférieur ou égal à 1), on a

$$\boxed{\mathrm{S} = \big(\mathbb{U} \times \overline{\mathrm{B}}(0,1)\big) \cup \big(\overline{\mathrm{B}}(0,1) \times \mathbb{U}\big)}$$

Soit $$\mathrm{S} = \{(e^{i\theta}, re^{i\phi}), (re^{i\theta}, e^{i\phi}) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, \theta \in \mathbb{R}, \phi \in \mathbb{R}\}$$

Or, en dimension 2 $$\nu(x,y) = y - x$$

donc $$|\nu(e^{i\theta}, re^{i\phi})| = \left|re^{i\phi} - e^{i\theta}\right| = \sqrt{(re^{i\phi} - e^{i\theta})\,\overline{(re^{i\phi} - e^{i\theta})}}$$

soit $$|\nu(e^{i\theta}, re^{i\phi})| = \sqrt{r^2 - 2r\cos(\theta - \phi) + 1}$$

Cette expression est majorée par $\sqrt{r^2 + 2r + 1}$, qui est elle-même majorée par $\sqrt{1+2+1} = 2$ car $r \leqslant 1$. On voit que 2 est atteint quand, d'une part $\cos(\theta - \phi) = -1$, et d'autre part $r = 1$. Sur $\mathbb{U} \times \overline{\mathrm{B}}(0,1)$, le maximum est atteint pour les vecteurs de la forme $\left(e^{i\theta}, -e^{-i\theta}\right)$ où θ est un réel.

L'étude de la partie $\overline{\mathrm{B}}(0,1) \times \mathbb{U}$ est complètement symétrique et conduit donc au même résultat.

$$\boxed{\text{Les vecteurs maximisant } |\nu| \text{ sur S sont les vecteurs proportionnels à } (1,-1).}$$

Et on a $$\boxed{\rho = 2}$$