Centrale Maths 2 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cédric Peschard (ENS Ulm) ; il a été relu par Renaud Durand (ENS Ulm) et Théo Seffusatti (Mines Paris).

Le problème comporte trois parties indépendantes, mais liées par un thème commun, la transformée de Legendre (mathématicien français, 1752–1833). À une fonction on associe une autre fonction. Il est apparu que cette transformation avait des liens avec certains domaines de recherche en sciences physiques (mécanique analytique, thermodynamique).

Le problème est très riche grâce à la variété des théories utilisées : analyse des fonctions réelles, calcul différentiel, suites dans des espaces euclidiens, mais aussi algèbre linéaire et bilinéaire ou convexité.

La première partie introduit la notion de transformée de Legendre dans le cas d'une fonction réelle. Après l'étude de quelques exemples, les techniques élémentaires de l'analyse réelle sont mises en œuvre (majorations, dérivations, convexité) pour dégager les propriétés générales de cette transformation. En particulier le cas de fonctions satisfaisant certaines conditions de régularité est traité, et des résultats plus précis sont démontrés.

Dans la deuxième partie, on reprend la notion de transformée de Legendre dans le cas d'une fonction d'un espace vectoriel de dimension finie dans lui-même. On se limite à des fonctions issues de l'algèbre linéaire, en fait des formes quadratiques. Formes bilinéaires, diagonalisation des matrices symétriques, mais aussi calcul différentiel sont les principales notions utilisées.

Les questions font apparaître des analogies entre les situations des deux premières parties, car ce sont en fait des résultats particuliers d'une théorie plus vaste.

La troisième partie s'attache à la description de parties d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant des contraintes de maximisation issues de la définition de la transformée de Legendre.

À nouveau, l'algèbre, linéaire et bilinéaire, est le principal instrument, avec en plus les notions de convexité, de topologie (fermeture, compacité). Cette partie se conclut par la construction d'une suite convergeant vers un point vérifiant le maximum.

Indications

Partie I

I.A.2 Distinguer plusieurs cas selon le signe de p.

I.A.3 Quelles sont les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $px - f(x)$?

I.B.1 La fonction correspondant à $ta + (1-t)b$ peut s'exprimer en fonction de celles qui correspondent à a et b.

I.B.3 Si $a \leqslant b$, on peut comparer ax et bx lorsque $x \in \mathrm{I}$.

I.C.1 Rechercher d'abord $x(p)$ en utilisant le fait que les fonctions étudiées sont dérivables et en établissant le tableau de variation de F

I.C.2 Montrer que $x(p)$ est dérivable, mais est-ce bien utile de calculer sa dérivée ?

I.C.3 Quelle est la pente ? Trouver un point de contact.

I.C.4.b Pour éviter des calculs compliqués, il vaut mieux revenir à la définition initiale.

I.C.4.c Quelle est la réciproque de $\mathcal{L}$?

Partie II

II.1 Les matrices symétriques réelles sont diagonalisables.

II.2 Exprimer B dans une base déjà introduite.

II.3.b Suivre l'indication pour dériver la relation de la question précédente, puis considérer un cas particulier de la nouvelle égalité obtenue.

II.3.C Appliquer l'égalité précédente au point ξ qui annule $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{F}$.

Partie III

III.A.1 On peut partir de l'expression $t\mathrm{F}(x_1) + (1-t)\mathrm{F}(x_2)$ et écrire : $x_1 = x + (x_1 - x)$, et de même pour x_2.

III.A.2 Utiliser l'égalité précédente, et le fait que ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{A}\mathrm{U} \geqslant 0$ pour tout U.

III.B.1 Il y a beaucoup de méthodes possibles. On peut par exemple diagonaliser A.

III.B.2 Obtenir une majoration de F qui permette de trouver $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} \mathrm{F}$.

Considérer deux parties de C.

III.B.3 Soient x_1 et x_2 deux éléments de M. Appliquer l'égalité obtenue à la question III.A.1.

III.C.2 L'implication $\Leftarrow$ est simple. Dans les deux cas, appliquer l'égalité obtenue à la question III.C.1.

III.D.1 C est fermé et borné, il est donc ...

III.D.3.a V_m représente un extremum pour une certaine fonction.

III.D.3.b Montrer séparément : $t_m \geqslant 0$ et $t_m \leqslant 1$.

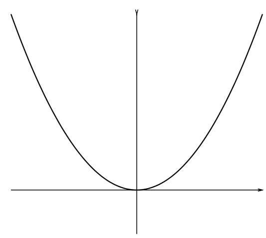
III.D.4 Minorer $\mathrm{F}(u_{m+1}) - \mathrm{F}(u_m)$. Montrer d'abord que t_m converge. Utiliser le critère trouvé à la question III.C.2.

Partie I Propriétés de la transformée de Legendre

I.A.1 La fonction $F : x \longmapsto px - kx^2$ est une fonction polynôme de degré 2, à coefficient dominant négatif. Elle est donc majorée.

Son maximum est atteint en $\dfrac{-p}{-2k} = \dfrac{p}{2k}$, et vaut :

$$p\frac{p}{2k} - k\left(\frac{p}{2k}\right)^2 = \frac{p^2}{2k} - \frac{p^2}{4k} = \frac{p^2}{4k}$$

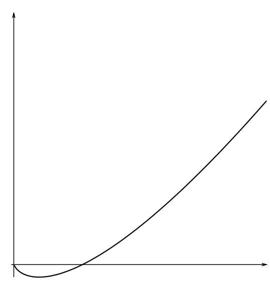


On a par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{J}(f) = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(p) = \frac{1}{4k}p^2}$$

I.A.2 La fonction $F : x \longmapsto px - e^x$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Par contre, son comportement en $-\infty$ dépend du signe de p :

- Si $p < 0$, $F : px - e^x$ tend vers $+\infty$ et donc la fonction F n'est pas majorée, et $p \notin \mathrm{J}(f)$.
- Si $p = 0$, $-e^x$ tend vers 0, de plus 0 majore F. Donc $0 \in \mathrm{J}(f)$ et $g(0) = 0$.
- Si $p > 0$, $px - e^x$ tend vers $-\infty$. La fonction étant $\mathcal{C}^1$ on peut chercher un maximum en cherchant où s'annule la dérivée : $F'(x) = p - e^x$. La dérivée s'annule en un seul point, $\ln p$. Finalement,



$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{J}(f) = \mathbb{R}_+ \\ \begin{cases} g(p) = p\ln p - p \quad \text{pour} \quad p > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \end{array}}$$

Remarquons que la fonction est continue en 0.

I.A.3 La fonction Arctan est bornée sur $\mathbb{R}$. Distinguons suivant le signe de p. Lorsque $p > 0$, en $+\infty$, $F : px - \operatorname{Arctan} x$ tend vers $+\infty$, la fonction n'est pas majorée.

De façon analogue, si $p < 0$, $\lim\limits_{-\infty} F = +\infty$.

Dans le cas où $p = 0$, la fonction $F(x) = -\operatorname{Arctan} x$ est majorée.

$$\boxed{\mathrm{J}(f) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad g(0) = \frac{1}{2}\pi}$$

I.B.1 Si a et b sont dans $\mathrm{J}(f)$, les fonctions

$$F_a : x \mapsto ax - f(x) \quad \text{et} \quad F_b : x \mapsto bx - f(x)$$

sont majorées.

Soient $t \in [\,0\,;1\,]$ et $c = ta + (1-t)b$. Exprimons la fonction $F_c : x \mapsto cx - f(x)$ en fonction de F_a et F_b :

$$\begin{aligned} F_c(x) &= cx - f(x) \\ &= (ta + (1-t)b)\,x - (t + 1 - t)f(x) \\ &= t\,(ax - f(x)) + (1-t)(bx - f(x)) \\ F_c(x) &= tF_a(x) + (1-t)F_b(x) \end{aligned}$$