CCP Maths 2 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Théo Seffusatti (Mines Paris) et Sébastien Desreux (ENS Ulm) ; il a été relu par Bruno Reyssat (ENS Lyon) et David Hernandez (ENS Ulm).

L'épreuve propose d'établir certains résultats de combinatoire au moyen de techniques d'analyse ; le problème est intéressant et très classique.

La première partie est centrée sur une étude, au moyen de séries entières, autour de la fonction

$$f\colon z \longmapsto \frac{z}{e^z - 1}$$

On établit des résultats qui seront utiles dans les parties suivantes, et on obtient au passage les développements en série entière des fonctions tan et th, ainsi qu'une expression de la somme $1^k + \cdots + \mathrm{N}^k$.

La deuxième partie donne, au moyen de techniques liées aux séries de Fourier, une expression de $\zeta(2p)$, où ζ est la fonction

$$\zeta\colon z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

en fonction de coefficients définis dans la partie précédente. (La fonction ζ joue un rôle très important en arithmétique ; la localisation de ses zéros non-triviaux fait l'objet de la célèbre conjecture de Riemann, ouverte depuis un siècle.)

La dernière partie aboutit à une expression de la fonction ζ pour une variable entière, paire ou impaire. On utilise pour cela la fonction d'Euler :

$$\Gamma\colon x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

L'étude fait appel à des techniques relatives aux intégrales généralisées.

Indications

Première partie

I.1.1 Utiliser le critère de d'Alembert.

I.1.2 Il faut se servir du développement en série entière de e^z .

I.2.1 f n'est pas définie en $2\,i\,\pi$.

I.2.2 Choisir $z = 0$ dans le développement de f .

I.2.3 Exprimer le terme général de la série produit $\mathrm{S}(z)f(z)$. Une fois trouvée l'expression de B_n en fonction de $\mathrm{B}_{n-1}, \ldots, \mathrm{B}_0$, procéder par récurrence sur n .

I.2.4 Utiliser la question précédente.

I.2.5 Calculer $f(z) - f(-z)$ de deux manières différentes et identifier les expressions obtenues.

I.3.2 Utiliser l'expression de $\operatorname{th} x$ et $\tan x$ en fonction de l'exponentielle. Montrer que th est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

I.4.1 Utiliser le développement en série entière de e^{xz} pour exhiber la suite de polynômes $\beta_n(x)$ explicitement. Bien que le calcul précis ne soit pas exigé, il pourra être réutilisé à la question II.1 .

I.4.2 Calculer $h(x+1,z) - h(x,z)$ en utilisant les deux expressions de f. Une fois effectué le calcul de $\beta_{k+1}(x+1) - \beta_{k+1}(x)$, sommer les égalités obtenues pour $x = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}$.

I.4.3 Utiliser la définition de h. Choisir $x = 0$ dans la relation obtenue pour trouver $\beta_n(1)$ et se servir de la question I.4.1 .

I.4.4 Dériver par rapport à x les deux expressions de h, puis identifier les deux développements obtenus. Intégrer alors l'égalité obtenue sur $[\,0\,;1\,]$..

Deuxième partie

II.1 Utiliser la question I.4.1 si vous avez calculé explicitement les polynômes $\beta_n(x)$, la relation (ii) sinon.

II.2.1 Montrer que la restriction de ϕ_2 à $]\,0\,;2\pi\,[$ admet la droite d'équation $x = \pi$ comme axe de symétrie.

II.2.2 Utiliser la parité de ϕ_2 pour les b_n .

II.3.1 Procéder par récurrence (et ne pas se décourager !).

II.3.2 Intégrer la relation obtenue à la question précédente et utiliser le développement de ϕ_2 en série de Fourier pour deviner une formule, puis la démontrer par récurrence.

II.3.3 Choisir $x = 0$ dans le développement de ϕ_{2p} .

Troisième partie

III.1 Montrer l'intégrabilité successivement sur trois intervalles de la forme $]\,0\,;a\,]$, $[\,a\,;b\,]$, $[\,b\,;+\infty\,[$ où $b > a > 0$.

III.2 Justifier la possibilité de dériver k fois sous le signe somme et déterminer une fonction de domination.

III.3.1 Reconnaître une série géométrique de raison e^{-t} .

III.3.2 Procéder comme à la question III.1.

III.3.3 Effectuer le changement de variable $u = nt$.

III.3.4 Utiliser le théorème de convergence dominée et la question précédente.

III.4.1 Intégrer par parties.

III.4.2 Reporter l'expression de $\Gamma(k)$ dans la relation obtenue à la question III.3.4 .

Première partie

I.1.1 Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\,!}$$

et notons R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On a
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par conséquent, d'après le critère de d'Alembert,

$$\boxed{\mathrm{R} = +\infty}$$

> Le critère de d'Alembert est un moyen très simple de trouver le rayon de convergence d'une série entière : si la suite de terme général $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ est convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors
> $$\mathrm{R} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$
> Mais attention, en cas de non-convergence, on ne peut rien en déduire ; le critère de d'Alembert n'a pas de réciproque.

I.1.2

> L'idée est bien sûr de se ramener à la série de l'exponentielle.

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} z\,\mathrm{S}(z) &= z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)\,!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)\,!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n\,!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n\,!} - 1 \\ z\,\mathrm{S}(z) &= e^z - 1 \end{aligned}$$