Mines Maths 1 MP 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Chevalier (ENS Ulm) ; il a été relu par Brice Goglin (ENS Lyon) et par Clotilde Breuillin (Mines de Paris).

Cette épreuve se présente comme un long enchaînement d'exercices plus ou moins difficiles, pour au bout du compte réaliser une étude complète d'un espace euclidien composé de matrices 2×2 complexes.

Cette étude fait appel à de nombreuses parties du programme, et amène beaucoup de petits calculs sur les matrices, les produits scalaires, les nombres complexes, etc. De la sorte, elle juge avant tout l'aisance du candidat à manipuler de nombreuses notions vues au cours des deux années de classe préparatoire. Peu de connaissances sont indispensables pour traiter le problème ; en revanche, un entraînement substantiel peut se révéler payant avec ce type d'épreuves, comme c'est souvent le cas au concours commun Mines – Ponts et Chaussées.

Il faut dire également que cette épreuve est relativement longue : le temps imparti n'est que de trois heures alors qu'il en faudrait plutôt quatre pour avoir le temps de la rédiger complètement. Il faut néanmoins éviter de sauter beaucoup de questions, car les résultats ne sont pas donnés et l'interdépendance des parties est assez importante. En particulier, les formules trouvées à la question I.1 et à la question II.2.a sont utilisées intensivement dans toute la suite du sujet.

Il y a cependant assez peu de questions vraiment difficiles, et les calculs ne sont jamais très compliqués (en règle générale, dans une épreuve de concours, un calcul trop compliqué est le signe d'une mauvaise voie) ; en deux mots, rien d'insurmontable dans cette épreuve par rapport au niveau général du concours.

Indications

I-2 En écrivant pour une matrice quelconque de M la formule $u + {}^t u = 0$, on obtient, pour les éléments de U, peu de degrés de liberté ; notamment, leur trace doit être nulle. On utilise alors une formule trouvée à la question I-1 pour calculer le carré d'un élément de M de trace nulle, et on trouve enfin que U ne contient que deux éléments, u et $-u$ (ce dernier est aussi égal à ${}^t u$). On peut utiliser ce résultat pour démontrer une propriété pour tout élément de U.

I-4.a Écrire d'emblée $g = x\mathrm{I}+m$ où m n'a que des imaginaires purs sur sa diagonale, puis vérifier que x peut bien prendre la forme du cosinus d'un angle que l'on appellera θ : il suffit pour cela que x appartienne à l'intervalle $[-1;1]$.

I-4.b Vérifier avant tout que $m \neq 0 \iff \det(m) > 0$ pour tout $m \in \mathrm{M}$.

I-5.a Montrer que $\det(m_\theta) = 1$, donc que $\mathrm{G}(g_1)$ est un sous-ensemble de G, puis que $m_\theta m_\phi = m_{\theta+\phi}$, formule dont découlent toutes les propriétés nécessaires pour que $\mathrm{G}(g_1)$ soit un sous-groupe commutatif de G.

I-5.b Écrire $g_1 = m_{\frac{\pi}{2}}$ et utiliser la formule ci-dessus pour multiplier les m_θ. Ensuite, écrire $\exp \theta g_1 = \alpha\mathrm{I} + \beta g_1$, à comparer avec le nombre complexe $\alpha + i\beta$ dont la valeur peut être calculée en le considérant comme la somme d'une série.

II-1.b On peut montrer que l_g n'est pas nul en calculant un terme de $l_g(w)$ et en montrant que ce dernier ne peut pas être nul pour tout w.

II-2.a Attention à cette question calculatoire, dont les résultats sont indispensables pour une grande partie de la suite du problème.

II-2.b Écrire le produit scalaire avec la trace et utiliser tous les moyens disponibles pour manipuler une trace, en plus de toutes les principales propriétés des éléments g, v et w.

II-3.a Cette question comporte en fait dix questions distinctes, soit dix calculs à réaliser. On n'omettra pas d'utiliser les résultats trouvés précédemment, notamment aux questions II-2.a et II-2.b.

II-3.b La question précédente montre que (u, h_0, h_1, h_2) est une base orthogonale. On en extrait (h_0, h_1, h_2), base orthogonale de V dont on déduit une base orthonormée en normant les vecteurs. On détermine la matrice en calculant les images par l_g des vecteurs de la base.

III-1.b On peut répondre à cette question en calculant un coefficient de la matrice $m\, w\, {}^t m - w$, qui doit être nul pour tout w.

III-2.c Utiliser la formule obtenue à la question III-2.b pour calculer les images par ψ_g des vecteurs de la base $(\gamma\, u, l_\gamma(v), \gamma\, l_\gamma(v))$.

Partie préliminaire

0 M est en bijection avec $\mathbb{R}^4$ par la relation qui à (x, y, z, t) associe la matrice

$$\begin{pmatrix} x+iy & i\,(z+it) \\ i\,(z-it) & x-iy \end{pmatrix}$$

L'addition est naturellement préservée, de même que la multiplication par un réel. La bijection ci-dessus est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels réels, dotant M d'une structure d'espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{M} = 4}$

> Attention : M n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. En effet, la multiplication par les scalaires imaginaires ne stabilise pas M. Par exemple, $i\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{M}$ puisque, dès lors que $ib = -1$, on a $b = i$ et $i\overline{b} = -i^2 = 1$ alors qu'on aurait voulu $i\overline{b} = -1$.

Si m_1 et m_2 sont dans M, leur produit (avec les notations naturelles) est :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & ib_1 \\ i\overline{b_1} & \overline{a_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & ib_2 \\ i\overline{b_2} & \overline{a_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1\overline{b_2} & ib_2a_1 + ib_1\overline{a_2} \\ i\overline{b_2}\overline{a_1} + i\overline{b_1}a_2 & \overline{a_2}\overline{a_1} - b_2\overline{b_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

avec les nombres complexes a et b définis par $a = a_1a_2 - b_1\overline{b_2}$ et $b = b_2a_1 + b_1\overline{a_2}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{M est stable par produit interne.}}$

> Suite à cette question, la plupart des autres propriétés élémentaires de M, G, U et V sont admises au début de la page 2 de l'énoncé. Il est heureux que celui-ci ne demande pas de faire toutes les vérifications élémentaires que cela demanderait !

Première partie

I-1 Soit
$$m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

On a alors
$$\det(m) = a\overline{a} + b\overline{b}$$

et
$$\mathrm{Tr}\,(m) = a + \overline{a}.$$

Calculons à présent le produit et la somme de m avec ${}^t\overline{m}$:
$$m + {}^t\overline{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{a} & -ib \\ -i\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\overline{a} & 0 \\ 0 & a+\overline{a} \end{pmatrix} = (a+\overline{a})\,\mathrm{I}$$

donc
$$\boxed{m + {}^t\overline{m} = \mathrm{Tr}\,(m)\ \mathrm{I}}$$

$$m\,{}^t\overline{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & -ib \\ -i\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a}+b\overline{b} & 0 \\ 0 & a\overline{a}+b\overline{b} \end{pmatrix} = \left(a\overline{a}+b\overline{b}\right)\mathrm{I}$$

ce qui revient à
$$\boxed{m\,{}^t\overline{m} = \det(m)\ \mathrm{I}}$$

À présent,
$$g \in \mathrm{G} \iff \det(g) = 1$$

or
$$g\,{}^t\overline{g} = \det(g)\,\mathrm{I}$$

donc
$$\boxed{g \in \mathrm{G} \iff g\,{}^t\overline{g} = \mathrm{I} \iff {}^t\overline{g} = g^{-1}}$$

Supposons maintenant, comme le demande l'énoncé, que $\mathrm{Tr}\ (m) = 0$. On a alors $m + {}^t\overline{m} = \mathrm{Tr}\ (m)\,\mathrm{I} = 0$, donc $m = -{}^t\overline{m}$. On calcule m^2 en utilisant $a + \overline{a} = 0 \implies \overline{a} = -a$ (a imaginaire pur).
$$m^2 = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b\overline{b} & 0 \\ 0 & a^2-b\overline{b} \end{pmatrix} = \left(a^2-b\overline{b}\right)\mathrm{I}$$

Comme
$$\det(m) = a\overline{a} + b\overline{b} = a\,(-a) + b\overline{b} = -a^2 + b\overline{b},$$

on obtient
$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(m) = 0 \implies m^2 = -\det(m)\ \mathrm{I}}$$

Par ailleurs, comme ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A}$, on a
$$\left({}^tm\right)^2 = {}^tm \times {}^tm = {}^t\left(m^2\right) = {}^t(-\det(m)\,\mathrm{I})$$

et finalement
$$\boxed{\mathrm{Tr}\,(m) = 0 \implies ({}^tm)^2 = -\det(m)\ \mathrm{I}}$$

Cette identité est symétrique de la précédente.

I-2 Soit
$$\mathrm{U} = \{u \in \mathrm{M} \mid u + {}^tu = 0\ ;\ u^2 = -\mathrm{I}\}$$

Si u est une matrice quelconque de M, on a