CCP Maths 2 MP 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Brice Goglin (ENS Lyon) ; il a été relu par Guilhem Bichot (Mines de Paris) et Francesco Colonna-Romano (ENS Ulm).

Le but du problème est d'étudier certaines familles de matrices.

Dans une première partie, on s'intéresse à la réductibilité des matrices. Ensuite, on étudie cette propriété sur des matrices à diagonale faiblement ou fortement dominante. Dans la troisième partie, on étudie trois familles de matrices qui satisfont certaines conditions sur leurs coefficients.

Cette épreuve n'est pas très difficile, et parfois assez calculatoire. Les seules compétences requises sont quelques connaissances en algèbre linéaire et bilinéaire des espaces vectoriels réels de dimension finie, et quelques notions sur l'étude des séries géométriques de matrices.

Les parties sont assez largement indépendantes.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

1-1.a.3 Remarquer que les permutations sont des bijections et en déduire que $\delta_{i\sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma(i)j}$.

1-1.c Partitionner $\mathrm{W_N}$ en $\{1,\ldots,\mathrm{P}\}$ et $\{\mathrm{P}+1,\ldots,\mathrm{N}\}$.

1-3.a Prendre $(i,j) \in \mathrm{S}\times\mathrm{T}$, et remarquer que les indices $i, i_1, \ldots, i_s, j$ sont dans S puis dans T.

1-3.b Prendre $\mathrm{S} = \{i\}$ et $\mathrm{T} = \mathrm{W_N} - \{i\}$. Choisir i_1 tel que $a_{ii_1} \neq 0$ et faire passer i_1 de T à S. Réitérer le processus et remarquer que j va forcément passer de T à S à une des $\mathrm{N}-1$ étapes.

2-1 Expliciter la nullité du i^{e} terme du produit AU.

3-1.b Écrire la nullité du terme (i,j) du produit AA^{-1} pour $i \neq j$.

3-2.a Remarquer que $\mathrm{Q}-\mathrm{I_N}$ est inversible et étudier la convergence de la suite $(\mathrm{Q}-\mathrm{I_N})\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{Q}^k$.

3-2.b Déterminer le signe des coefficients de B et de ses puissances, puis appliquer la question 3-2.a à la série des puissances de B.

3-3.c Utiliser la caractérisation obtenue à la question 3-2.a.

3-4.b.1 Montrer que $\widehat{\mathrm{A}}$ est symétrique, positive puis définie positive.

3-4.b.2 Utiliser une valeur propre de $\mathrm{I_N}-\mathrm{B}$ négative et un vecteur propre associé.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Première partie

1-1.a.1 Soient σ et σ' deux permutations de l'ensemble $\mathrm{W_N}$. Soient i et j deux éléments de $\mathrm{W_N}$. Évaluons l'élément x situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de la matrice produit $\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma'}$.

On a
$$x = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{P}_\sigma)_{ik} (\mathrm{P}_{\sigma'})_{kj}$$

Par définition de P_σ, on a $(\mathrm{P}_\sigma)_{ik} = \delta_{i\sigma(k)}$.

Donc
$$x = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \delta_{i\sigma(k)} \delta_{k\sigma'(j)}$$

Le terme $\delta_{k\sigma'(j)}$ est non nul si et seulement si $k = \sigma'(j)$. Il vaut alors 1. La somme citée ci-dessus ne comporte donc que le terme correspondant au cas $k = \sigma'(j)$.

D'où
$$x = \delta_{i\sigma(\sigma'(j))} = (\mathrm{P}_{\sigma\sigma'})_{ij}$$

Or, ce terme $(\mathrm{P}_{\sigma\sigma'})_{ij}$ est exactement la valeur de l'élément situé sur la ligne i et sur la colonne de j dans la matrice $\mathrm{P}_{\sigma\sigma'}$.

On a donc
$$\boxed{\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma'} = \mathrm{P}_{\sigma\sigma'}}$$

1-1.a.2 Les permutations de $\mathrm{W_N}$ sont, bien entendu, des bijections et sont donc inversibles. On peut donc appliquer la formule précédente à une permutation et à son inverse.

On obtient
$$\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma^{-1}} = \mathrm{P}_{\sigma\sigma^{-1}} = \mathrm{P}_{\mathrm{Id}}$$

La matrice P_{Id} de la permutation identité est en fait la matrice des symboles de Kronecker. C'est donc la matrice identité $\mathrm{I_N}$.

Donc
$$\mathrm{P}_\sigma \mathrm{P}_{\sigma^{-1}} = \mathrm{I_N}$$

Comme les matrices considérées ici sont carrées, on peut en déduire

$$\boxed{(\mathrm{P}_\sigma)^{-1} = \mathrm{P}_{\sigma^{-1}}}$$

1-1.a.3 Les permutations étant des bijections, on a $i = j$ si et seulement si $\sigma(i) = \sigma(j)$. Les symboles de Kronecker δ_{ij} valent donc également $\delta_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Si on applique cette remarque avec $\sigma^{-1}(j)$ à la place de j, on déduit

$$\delta_{i\sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma(i)j}$$

$\delta_{\sigma(i)j}$ est en fait le terme situé sur la ligne i et la colonne j dans la transposée de la matrice P_σ.

Les termes de la transposée de P_σ sont donc les $\delta_{i\sigma^{-1}(j)}$, c'est-à-dire les termes de $\mathrm{P}_{\sigma^{-1}}$.

Donc
$$\boxed{{\mathrm{P}_\sigma}^{-1} = \mathrm{P}_{\sigma^{-1}} = {}^t\mathrm{P}_\sigma}$$

$$\boxed{\mathrm{P}_\sigma \text{ est une matrice orthogonale.}}$$

1-1.b Soient i et j deux indices.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

On a $$b_{ij} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left(\mathrm{P}_\sigma^{-1}\right)_{ik} (\mathrm{AP}_\sigma)_{kj}$$

Le terme $\left(\mathrm{P}_\sigma^{-1}\right)_{ik}$ est le symbole de Kronecker $\delta_{i\sigma^{-1}(k)}$. Il ne reste donc dans la somme que le terme vérifiant $i = \sigma^{-1}(k)$, c'est-à-dire $k = \sigma(i)$.

Donc $$b_{ij} = (\mathrm{AP}_\sigma)_{\sigma(i)j} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_{\sigma(i)k} (\mathrm{P}_\sigma)_{kj}$$

De la même façon, il ne reste dans cette somme que le terme tel que $k = \sigma(j)$.

D'où $$\boxed{b_{ij} = \mathrm{A}_{\sigma(i)\sigma(j)}}$$

> Comme on vient de le voir, les matrices P_σ sont orthogonales. Ce sont donc des matrices de changement de base orthonormée. En fait, il s'agit d'une permutation des vecteurs de base de l'espace. On comprend donc d'où vient la formule que l'on vient d'obtenir.

1-1.c Supposons qu'il existe une matrice de permutation P_σ telle que

$$\mathrm{P}_\sigma^{-1}\mathrm{AP}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{O} \\ \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{F} \in \mathcal{M}_\mathrm{P}(\mathbb{R})$, $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N-P}}(\mathbb{R})$ et O nulle.

Alors pour tout couple (i, j) vérifiant $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} < j \leqslant \mathrm{N}$, on a $\left(\mathrm{P}_\sigma^{-1}\mathrm{AP}_\sigma\right)_{ij} = 0$.

D'après la question précédente, on en déduit pour $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} < j \leqslant \mathrm{N}$

$$\mathrm{A}_{\sigma(i)\sigma(j)} = 0$$

Considérons l'ensemble S des images des entiers $1, \ldots, \mathrm{P}$ par σ et T celui de l'image de $\mathrm{P}+1, \ldots, \mathrm{N}$ par σ. Les ensembles $1, \ldots, \mathrm{P}$ et $\mathrm{P}+1, \ldots, \mathrm{N}$ forment une partition de $\mathrm{W_N}$. Or, σ réalise une bijection de $\mathrm{W_N}$, S et T forment donc une partition de $\mathrm{W_N}$.

On a donc obtenu deux ensembles S et T d'intersection vide et d'union $\mathrm{W_N}$, tels que pour tout couple (i, j) de $\mathrm{S} \times \mathrm{T}$, $\mathrm{A}_{ij} = 0$. A est donc réductible.

On constate que ce raisonnement utilise des équivalences à chaque étape. Pour construire la permutation σ, il suffit de faire correspondre S à un ensemble $\{1, \ldots, \mathrm{P}\}$ et T à $\{\mathrm{P}+1, \ldots, \mathrm{N}\}$.

On a ainsi montré l'équivalence demandée.

$$\boxed{\text{A est irréductible} \Leftrightarrow \nexists \sigma \text{ telle que } \mathrm{P}_\sigma^{-1}\mathrm{AP}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{O} \\ \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{pmatrix}}$$

1-2.a Notons U_1 le vecteur constitué des P premières composantes de U et U_2 celui composé des $\mathrm{N}-\mathrm{P}$ dernières composantes. Notons de la même façon X_1 et X_2.

On a $$\begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{O} \\ \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{FX}_1 \\ \mathrm{GX}_1 + \mathrm{HX}_2 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système $\mathrm{CX} = \mathrm{U}$ revient donc à résoudre les deux systèmes $\mathrm{FX}_1 = \mathrm{U}_1$ et $\mathrm{GX}_1 + \mathrm{HX}_2 = \mathrm{U}_2$.

On a donc $$\boxed{\mathrm{X}_1 = \mathrm{F}^{-1}\mathrm{U}_1}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .