CCP Maths 1 MP 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guilhem Bichot (Mines de Paris) ; il a été relu par Lionel Eyraud (ENS Lyon) et Brice Goglin (ENS Lyon).

L'épreuve se compose d'un seul problème, en quatre parties, consacré à l'analyse. La première partie montre la complétude de $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. La deuxième partie établit le théorème du point fixe de Banach. Dans la troisième partie, on étudie une transformation définie par une intégrale. Enfin la dernière partie applique les résultats des trois premières à une équation fonctionnelle.

Ce problème est assez difficile et requiert une bonne maîtrise de l'analyse dans les espaces de Banach et des grands théorèmes de l'analyse (convergence monotone et dominée).

Indications

I.1 Montrer que $(f_n(x))$ est de Cauchy, pour cela, utiliser la propriété $\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leqslant \mathcal{N}_\infty\,(f_{n+p} - f_n)$.

I.2 Écrire que f_n est de Cauchy, puis fixer x et n, et faire tendre p vers l'infini.

I.3 Utiliser la question I.2.

I.4 Pour montrer que (u_n) n'est pas de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$, raisonner par l'absurde et remarquer que la limite simple de (u_n) n'est pas continue.

I.5 Pour la convergence simple, utiliser le théorème de convergence dominée. Pour la convergence uniforme, étudier la monotonie de $v_n - v$.

II.2.1 Pour la première inégalité, raisonner par récurrence sur n. Pour la deuxième, écrire $a_{n+p} - a_n$ comme une somme de p termes et utiliser la première inégalité.

II.2.2 Montrer que (a_n) est de Cauchy en utilisant la question II.2.1. Pour prouver que la limite est dans A, remarquer que A est fermé.

II.2.3 Pour l'existence, utiliser la question II.2.2 et passer à la limite dans $a_{n+1} = \mathrm{T}(a_n)$. Pour l'unicité, utiliser la question II.1.

II.3.1 Pour la continuité, remarquer que T est lipschitzienne. Pour la bijectivité, se ramener à un problème de point fixe et utiliser la question II.2.3.

II.3.2 Commencer par minorer $\|\mathrm{U}(u) - \mathrm{U}(v)\|$.

II.4.1 Si $x \neq y$, considérer $\dfrac{x-y}{\|x-y\|}$.

II.4.2 Remarquer que $(\mathrm{I} + \mathrm{V}_n)(x_n) = (\mathrm{I} + \mathrm{V})(x)$ et utiliser l'indication fournie par l'énoncé.

III.1 Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

III.2.2 Pour montrer que $\mathrm{T}_\varphi(u)$ est continue, utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

III.2.4 Utiliser la question II.3.2.

III.3.1 Pour montrer que φ est de type $\mathcal{U}$, utiliser que μ est bornée sur $[\,0\,;1\,]^2$. Pour démontrer l'isomorphisme, utiliser la question III.2.4.

IV.1 Faire apparaître $\mathcal{S}_{(\varphi,-1)}$ pour φ bien choisie et utiliser la question III.3.1.

IV.2.1 Écrire $(\mathbf{E}_1)$ et remarquer que w_1 est nécessairement de la forme $a\,x$. Puis réinjecter.

IV.2.2 Écrire $(\mathbf{E}_n)$ et remarquer que w_n est nécessairement de la forme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i-1}\,x^{2i-1}$. Réinjecter pour trouver le système satisfait par les a_{2i-1}.

IV.2.3 Pour montrer que $\mathcal{N}_\infty(v_n) < 1$, écrire $v_n(x,y) - \sin xy$ comme reste d'une série alternée. Ensuite, utiliser la question III.3.1.

IV.2.4 Utiliser la question II.4.2 (en vérifiant ses hypothèses grâce aux questions III.2.3, III.3.1, III.3.2).

I. Convergence uniforme dans $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$

I.1

> L'énoncé munit implicitement $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ de la norme $\mathcal{N}_\infty$, ce qui est possible car toute fonction continue sur un compact est bornée, et $[0;1]$ est compact.

Soient $x \in [0;1]$ et $\varepsilon > 0$. (f_n) est de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$:

$$\exists \mathrm{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \qquad \mathcal{N}_\infty(f_{n+p} - f_n) \leqslant \varepsilon$$

Soit N ainsi choisi. On a alors

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \qquad \|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f_{n+p} - f_n) \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Nous venons donc de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \qquad \|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire que $(f_n(x))$ est de Cauchy, et donc converge, $\mathbb{R}$ étant complet.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0;1],\ (f_n(x)) \text{ converge.}}$$

I.2.a Montrons que f est bornée.
(f_n) est de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$: en choisissant $\varepsilon = 1$, on a

$$\exists \mathrm{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \qquad \mathcal{N}_\infty(f_{n+p} - f_n) \leqslant 1$$

Soient N ainsi choisi, $n = \mathrm{N}$, et $x \in [0;1]$.

Alors
$$\begin{aligned} \forall p \qquad \|f_{\mathrm{N}+p}(x) - f_{\mathrm{N}}(x)\| &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f_{\mathrm{N}+p} - f_{\mathrm{N}}) \\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

En faisant tendre p vers l'infini,

$$\|f(x) - f_{\mathrm{N}}(x)\| \leqslant 1$$

d'où, par inégalité triangulaire

$$\|f(x)\| \leqslant \|f_{\mathrm{N}}(x)\| + 1$$

d'où enfin
$$\|f(x)\| \leqslant \mathcal{N}_\infty(f_{\mathrm{N}}) + 1$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in [0;1]$,

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } [0;1].}$$

> Il faut connaître les deux énoncés équivalents de l'inégalité triangulaire :
> $$\begin{aligned} &(i) \quad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\ &(ii) \quad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \|x-y\| \geqslant \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \end{aligned}$$

I.2.b Montrons que $\mathcal{N}_\infty(f_n - f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. (f_n) est de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$:

$$\exists \mathrm{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \quad \forall p \qquad \mathcal{N}_\infty(f_{n+p} - f_n) \leqslant \varepsilon$$

Soient N ainsi choisi, $n \geqslant \mathrm{N}$, et $x \in [\,0\,;1\,]$.

Alors
$$\forall p \qquad \begin{aligned} \|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| &\leqslant \mathcal{N}_\infty(f_{n+p} - f_n) \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

En faisant tendre p vers l'infini,

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \varepsilon$$

Nous venons donc de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire que
$$\boxed{\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

I.3 Un espace de Banach est, par définition, un espace vectoriel normé complet. Nous devons donc montrer que $\mathcal{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni de $\mathcal{N}_\infty$ est complet. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, de Cauchy pour $\mathcal{N}_\infty$. On applique le résultat de la question I.2 : (f_n) converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$ vers une fonction f. Il ne reste plus qu'à montrer que f est continue : f est continue car elle est limite uniforme de la suite des f_n qui sont toutes continues.

$$\boxed{\mathcal{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \text{ muni de } \mathcal{N}_\infty \text{ est un espace de Banach.}}$$

I.4.a Montrons que $(u_n(x))$ converge pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$.

Soit $x \in [\,0\,;1\,]$.

- Si $x < 1$, alors $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc par continuité de l'exponentielle,

$$u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^0 = 1$$

- Si $x = 1$, alors pour tout n, $1^n = 1$ et $u_n(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Ainsi, la suite (u_n) converge simplement vers la fonction $u : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \mathrm{e} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$