Complément ∞

Les aventures de l'infini

I LE DÉMON DE MINUIT, LA FILLE DU CALIFE ET LA FONCTION EXPONENTIELLE

Un calife avait une fille belle comme le jour. Un démon tomba amoureux d'elle — et les choses étant ce qu'elles sont, la fille aima le démon. Il décida d'obtenir sa main auprès de son père, mais il se doutait que ce ne serait pas chose facile. Le calife aimait tellement sa fille qu'il n'accepterait jamais qu'elle parte, et encore moins avec un démon.

Pourtant, le calife avait un point faible : il avait la passion de l'or. Sa fille le savait, et décida de conseiller le démon. Comme elle était très futée, elle eut une idée et la soumit à son amoureux.

Celui-ci vint alors le voir et lui proposa un sac d'or en échange de sa fille. Le calife sourit avec mépris et refusa net. Le démon proposa alors un coffre d'or ; la calife refusa tout autant. Le démon proposa alors une montagne d'or — qui fut refusée avec la même promptitude. « Que veux-tu alors pour me donner la main de ta fille, ô calife ? » Le calife réfléchit et, pensant tendre un piège au démon, lui dit : « Je veux être, non pas immensément riche, mais *infiniment riche.* »

Le démon réfléchit ; « si je te rends infiniment riche, tu me donneras ta fille ? — Oui, si tu me rends infiniment riche. »

Le démon eut alors un petit sourire en coin, que ne perçut pas le calife.

« Voici ce que je te propose. Il est 11 heures du soir, il ne reste qu'une heure avant minuit. Je vais te donner une pièce d'or.

— Une seule ?

— Attends, ce n'est pas tout. À 11 heures et demie, je te donnerai *deux* pièces d'or.

— Ce n'est guère.

— Mais ce n'est pas fini. À minuit moins un quart d'heures, je te donnerai *quatre* pièces d'or ; à minuit moins un huitième d'heure, je t'en donnerai *huit*, à minuit moins un seizième d'heure je t'en donnerai *seize* et ainsi de suite... jusqu'à minuit, heure à laquelle je m'arrêterai. »

Le calife réfléchit ; il réfléchit encore un peu, en plissant bien le front, puis déclara, ravi « Eh bien, alors c'est d'accord. »

« Tope-là », dit le démon, mais au moment de toper, il se retint et ajouta « Ah, j'ai oublié de te prévenir, chaque livraison est payante (je sous-traite auprès de démons subalternes), et coûte une pièce d'or. La première livraison est gratuite (je m'en chargerai, ce n'est guère lourd), mais le démon subalterne te prendra ta première pièce au second voyage ; au voyage suivant, il te prendra ta deuxième pièce, et ainsi de suite, il te prendra à chaque fois une (et une seule) pièce par livraison. »

Le calife, la main toujours levée, réfléchit dare-dare, le front plissé et la langue soigneusement tirée. Rien à faire, l'affaire lui paraissait claire, quoi qu'il arrive, il gagnait toujours beaucoup de pièces à chaque livraison et, la théorie des séries numériques lui étant connu, il lui paraissait clair qu'il allait être *infiniment* riche, comme il le désirait.

« Tope-là » : le marché était conclu.

La première pièce arriva instantanément.

Bouillant d'impatience, le calife attendit la seconde pièce. Au bout d'une interminable demi-heure, deux pièces se matérialisèrent, il entendit un froissement d'ailes parcheminées, et sa première pièce disparut. Le calife contempla sa fortune, enfin, ses deux pièces, les mit en piles et se réjouit d'avance. Quand, un quart d'heure plus tard, quatre autres pièces se matérialisèrent, il eut un grand sourire, à peine tempéré par la disparition d'une des deux pièces de la première pile. Il fit, des quatre nouvelles pièces, une autre pile.

Sept minutes et demie plus tard, huit autres pièces apparurent, qu'il mit aussitôt en pile ; un bruissement d'ailes — sa première pile venait de disparaître, comme convenu.

Ensuite, tout alla très vite : il put faire, dans les minutes qui suivirent, une pile de seize, une de trente-deux, assez vacillante, et un tas de soixante-quatre. Pendant ce temps, la deuxième pile, qui avait commencé à quatre pièce, n'était plus réduite qu'à une pièce, qui à son tour disparut dans un bruissement d'ailes parcheminées quand arriva la livraison suivante. La quantité d'or augmentait à toute vitesse, et les pièces ne disparaissaient que lentement.

Pourtant, l'angoisse du calife augmentait. Et puis, tout se mit à aller si vite qu'il ne pouvait plus rien suivre de ses yeux. La quantité d'or sembla augmenter infiniment vite, l'or le submergea, il lui sembla que les murs craquaient, que l'univers se remplissait de métal précieux, que tout Bagdad disparaissait sous les montagnes d'or — et soudain, il n'y eut plus rien, rien qu'un grand silence : la chambre du calife était entièrement vide, tout l'or avait disparu.

Il n'y eut plus, à bien tendre l'oreille, qu'un bruissement d'ailes parcheminées et un léger rire cristallin.

« Voleur ! Tu es un voleur ! Rends-moi mon or ! »

Les démons n'aiment pas être traités de menteurs. Celui-là avait un sens de l'honneur particulièrement développé — quoique retors. Il revint au palais. « Calife, ô cher calife, si tu penses que je t'ai pris indûment ne serait-ce qu'une seule pièce, je me ferais un plaisir de te la rendre au centuple !

— Fourbe, assassin, où est mon or ? Je devrais être immensément riche, à cette heure !

— Mais, ô grand calife et protecteur de Bagdad, dis-moi exactement quelle pièce je n'aurais pas dû te prendre. Ce n'était pas la première — elle a payé le deuxième voyage. Ce n'était pas non plus la deuxième ou la troisième pièce — elles ont payé les troisième et quatrième voyage. Pour la même raison, ce n'était pas la cinquième, ni la sixième, ni la septième ; en fait, toutes les pièces que tu as reçues dans la soirée ont fini par payer un voyage. Encore une fois, je suis très honnête : si tu peux me désigner une *quelconque* pièce que je n'aurais pas dû reprendre pour mon associé, je te la rendrai — au centuple. »

Le calife fronça les sourcils, plissa le front, tira la langue tant qu'il put — mais en vain ; il ne put désigner ainsi aucune pièce qui aurait dû rester en sa possession. Et le démon repartit, le cœur léger, organiser son voyage de noces.

La fille du calife et lui vécurent heureux, jusqu'à ce que vienne celle qui éteint toute joie et sépare ceux qui étaient réunis.

♦ **Exercice 0.1** **On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$\mathrm{P}_n : z \longmapsto 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}.$$

i) **Montrer que P_n admet, dans le plan complexe, n racines distinctes.**

ii) **Calculer, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(z)$. On notera f la limite simple de la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

iii) **Combien de zéros la fonction f possède-t-elle dans $\mathbb{C}$?**

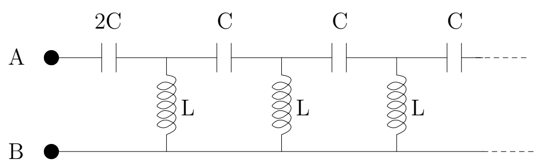
iv) **Relier ce résultat à l'histoire du calife.**

II LES AMBIGUÏTÉS D'UN PROCESSUS DE LIMITE

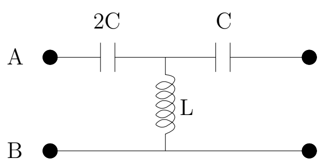
Il arrive qu'un processus de limite donne lieu à des comportements contradictoires. Ceux-ci peuvent être de plusieurs natures : contradiction avec l'intuition (le moins grave des cas), contradiction entre un comportement mathématique et un comportement physique (sans doute dû à une modélisation ambiguë)

II.a Filtre semi-infini se comportant comme un guide d'onde

On considère le dipôle AB suivant :



constitué d'une suite de cellules en « T » (2C, L, 2C) placés en cascade



(les deux condensateurs placés en série de deux cellules successives sont équivalents à un condensateur unique de capacité C). On cherche à calculer l'impédance totale de ce dipôle.

Dans un premier temps, considérons non pas le dipôle infini, mais un dipôle d'impédance Z_n correspondant à une chaîne *finie* de n cellules élémentaires. On a la relation de récurrence entre les Z_n, obtenue par les lois de Kirchhoff bien connues :

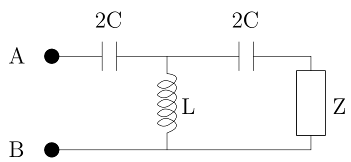
$$\mathrm{Z}_{n+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{C}\omega} + \frac{\mathrm{i}\mathrm{L}\omega\left(\dfrac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{C}\omega} + \mathrm{Z}_n\right)}{\mathrm{i}\mathrm{L}\omega + \dfrac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{C}\omega} + \mathrm{Z}_n}, \qquad (1)$$

Notamment, si Z_n est imaginaire pur, alors Z_{n+1} l'est aussi. Puisque Z_1 est imaginaire pur, on en déduit par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{Z}_n \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Nous ne savons pas si la suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Mais une chose est sure : si la suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite, celle-ci est forcément imaginaire pure.

Calculons maintenant l'impédance du dipôle complet, (toujours en fonction de la pulsation sinusoïdale ω). On remarque que ce dipôle AB est *strictement* équivalent au dipôle suivant :



On en déduit donc une équation sur Z :

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{C}\omega} + \frac{\mathrm{i}\mathrm{L}\omega\left(\dfrac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{C}\omega} + \mathrm{Z}\right)}{\mathrm{i}\mathrm{L}\omega + \dfrac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{C}\omega} + \mathrm{Z}}. \qquad (2)$$

Après quelques calculs (on a *fortement* intérêt à poser $\mathrm{X} = 1/2\mathrm{i}\mathrm{C}\omega$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{i}\mathrm{L}\omega$...), on tombe sur une équaton du second degré :

$$\mathrm{Z}^2 = \frac{1}{\mathrm{C}} \cdot \left(\mathrm{L} - \frac{1}{4\mathrm{C}\omega^2}\right).$$

On doit alors considérer deux cas :

Si $\omega < \omega_c = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{LC}}}$ alors $\mathrm{Z}^2 < 0$ et par conséquent Z est imaginaire pur et est de la forme

$$\mathrm{Z} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{4\mathrm{C}^2\omega^2} - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}}.$$

Du point de vue mathématique, on ne peut *a priori* rien dire de plus et notamment, une incertitude subsiste quant au signe de Z.

On peut cependant déterminer ce signe par un argument physique. Faisons tendre ω vers 0 (régime continu). Alors

$$\mathrm{Z}(\omega) \underset{\omega\to 0^+}{\sim} \pm\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{C}\omega}$$

et donc tend en module vers l'infini, ce qui est attendu : le circuit équivalent est ouvert, le premier condensateur « coupe » le circuit. On attend donc physiquement

$$Z(\omega) \underset{\omega\to 0^+}{\sim} -\frac{\mathrm{i}}{2C\omega},$$

(comportement d'un condensateur seul).

Ainsi, la solution physiquement acceptable à l'équation (2) est

$$Z = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{4C^2\omega^2} - \frac{L}{C}}.$$

Si $\omega > \omega_c = \dfrac{1}{2\sqrt{LC}}$ alors $Z^2 > 0$ et Z est donc réel :

$$Z = \pm\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4C^2\omega^2}}.$$

Là encore, le signe de Z peut être déterminé par des arguments physiques. La partie réelle d'une inductance (appelée « partie résistive ») est toujours *positive* dans le cas d'un composant passif, puisqu'elle est responsable d'une dissipation d'énergie par effet Joule. Seuls des composants actifs[1] peuvent avoir une résistance négative. Ainsi, la solution physiquement acceptable de l'équation (2) est

$$Z = +\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4C^2\omega^2}}.$$

Y a-t-il paradoxe ?

Du point de vue mathématique L'équation (2) n'est rien d'autre, on l'aura remarqué, que l'équation de style « point fixe » associé à la relation de récurrence (1). En d'autres termes, c'est celle que l'on aurait obtenue si l'on avait prouvé que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ convergeait vers une limite Z.

Mais souvenons-nous du théorème de mathématiques précis :

THÉORÈME Soit $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par une relation de récurrence $Z_{n+1} = f(Z_n)$.
***Si* la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite Z, et *si* la fonction f est continue en Z, alors cette limite vérifie l'équation de point fixe : $f(Z) = Z$.**

Dans le cas litigieux (lorsque $\omega > \omega_c$), la deuxième condition est bien remplie : la fonction f est continue en tout point réel (le seul dénominateur ne s'annule que sur l'axe imaginaire). En revanche, rien ne nous assure de la convergence de la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$. En fait, nous sommes même absolument certains que cette suite ne converge pas.

Du point de vue physique Le comportement de la chaîne est pour le moins surprenant. Comment a-t-on un effet résistif avec des composants purement inductifs ou capacitifs ? Ou, du point de vue énergétique : l'énergie se dissipe-t-elle ? Et si oui, où va-t-elle ?

En fait, l'énergie ne se « dissipe » pas au sens de l'effet Joule, mais en revanche elle disparaît bien, du point de vue de l'opérateur qui « a en mains les points A et B ». Plus exactement, on peut montrer qu'il y a un flux d'énergie, se propageant de maillon en maillon. Au début de la chaîne, on a donc un « puits » d'énergie qui semble engloutir une puissance constante. Pour autant, il n'y a pas de dissipation : une chaîne infinie peut engloutir de l'énergie sans jamais la stocker nulle part[2].

Notons que cette chaîne infinie est utilisée pour modéliser des guides d'onde.

II.b Deux paradoxes sur le théorème de l'énergie cinétique

• ***Premier paradoxe*** Considérons un camion (de masse m) roulant à une vitesse constante $v = 60$ km.h^{-1} sur une autoroute parfaitement rectiligne. On suppose que les frottements étant négligeables, *le camion ne consomme pas d'essence pour garder une vitesse constante.*

En revanche, pour modifier sa vitesse, il doit consommer ℓ litres d'essence pour augmenter son énergie cinétique de 1 joule. Cette supposition, bien qu'imparfaite, est néanmoins physiquement acceptable, puisque chaque litre d'essence brûlée lui apporte une quantité d'énergie constante.

Ainsi, lorsque le camionneur décide de pousser son engin à $v' = 80$ km.h^{-1}, il doit brûler au total une quantité d'essence égale à la différence des énergies cinétiques, soit

$$\ell(E_c'-E_c) = \frac{1}{2}\ell m(v'^2-v^2) = \frac{1}{2}\ell m(6\,400-3\,600) = 1\,400\times\ell m.$$

Disons, avec $\ell\cdot m = \frac{1}{1000}$ J.km^{-2}h^2, un total de $1,4$ litres.

Bien.

Maintenant, considérons la même scène, mais observée par un motard de la Gendarmerie Nationale, qui roule à la même vitesse w que le camion : $w = v = 60$ km.h^{-1} (mais dont la moto n'est pas assez puissante pour qu'il accélère davantage).

Le gendarme, qui se souvient de ses cours de physique de lycée, se fait le raisonnement suivant : « le camion est passé d'une vitesse $v^* = 0$ (dans mon référentiel, à proprement parler galiléen), à une vitesse $v^{*\prime} = 20$ km.h^{-1}. Pour cela, il a dû brûler une quantité d'essence égale à la différence des énergies cinétiques, soit

$$\ell(E_c^{*\prime}-E_c^*) = \frac{1}{2}\ell m\Big((v^{*\prime})^2-(v^*)^2\Big) = \frac{1}{2}\ell m(400-0) = 200\times\ell m,$$

c'est-à-dire $0,2$ litres. »

Il y a clairement un problème, et l'un des deux observateurs doit avoir tort[3]. Pourtant, en relativité galiléenne, tous les référentiels galiléens doivent être équivalents, et les calculs de l'énergie cinétique sont tout à fait valables dans le référentiel du gendarme.

Comment lever ce paradoxe ?

Avant d'en voir la résolution, penchons-nous d'abord sur un second problème. Le lecteur, avant de sauter à la solution, est fortement invité à réfléchir à ces deux problèmes et à essayer de les résoudre par lui-même.

• ***Second paradoxe*** Considérons une balle élastique (genre super-balle) en chute libre dans un premier temps.

[1]Comme des amplificateurs opérationnels, avec lesquels on peut créer un montage « à résistance négative ».

[2]C'est le principe des « hôtels infinis de Hilbert » !

[3] Les Lyonnais savent que c'est le Gendarme qui a tort.

Elle finit par rencontrer le sol, et on supposera que *la collision est élastique*.

On trouvera le raisonnement suivant dans la plupart des livres de lycée : « Supposons qu'à l'instant $t = 0$ du choc, la vitesse de la balle soit de $v_1 = -10$ m.s^{-1}. Le choc étant élastique, on a conservation de l'énergie totale, donc de l'énergie cinétique juste avant et juste après le choc. En conséquence de quoi la balle rebondit avec une vitesse $v_2 = -v_1$, soit $+10$ m.s^{-1} vers le haut. »

Ce raisonnement est, à première vue, convaincant. Il l'est beaucoup moins si l'on considère un observateur animé d'une vitesse constante vers le bas $v_{\text{obs}} = v_1 = -10$ m.s^{-1}. Pour cet observateur, la balle a, juste avant l'instant du choc, une vitesse $v_1' = v_1 - v_{\text{obs}} = 0$ m.s^{-1}, et donc une énergie cinétique nulle, mais possède, juste après le choc, une vitesse $v_2' = v_2 - v_{\text{obs}} = 20$ m.s^{-1}, et donc une énergie cinétique non nulle ; en répétant le raisonnement précédent, on aurait dû trouver encore une vitesse nulle (la balle traversant le sol !?)

Il y a donc quelque chose de singulier dans le raisonnement tenu. Il est important de noter que *ce n'est pas parce que le premier raisonnement conduit à un résultat juste qu'il est plus valable que le second.*

Les lecteurs ayant résolu le premier paradoxe n'auront aucun mal à résoudre celui-ci.

• ***Résolution des paradoxes*** L'énergie cinétique d'un objet n'est bien sûr pas la même dans un référentiel ou dans un autre. Cela dit, ce n'est pas tant l'énergie cinétique en elle-même qui nous importe ici, mais plutôt la différence des énergies cinétiques avant et après le choc.

Rappelons-nous nos cours de mécanique élémentaire. Si l'on prend un système composé de N corps, de vitesses initiales $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \dots, \mathrm{N})$, qui subissent à un moment donné des chocs et qui ont des vitesses finales $\boldsymbol{v}_i'$, que voit-on dans deux référentiels différents ?

La différence d'énergie cinétique *avant* et *après* le choc est, dans le premier référentiel :

$$\Delta \mathrm{E}_c = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} m_i({\boldsymbol{v}_i'}^2 - \boldsymbol{v}_i^2).$$

Dans un référentiel animé d'une vitesse $\boldsymbol{w}$ par rapport au premier (et dans lequel toutes les quantités physiques seront dénotées avec une étoile en exposant), cette même différence vaut

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{E}_c^* &= \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} m_i\Big((\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{w})^2 - (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w})^2\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} m_i({\boldsymbol{v}_i'}^2 - {\boldsymbol{v}_i}^2) - 2\boldsymbol{w}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} m_i(\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{v}_i)\right)\\ &= \Delta \mathrm{E}_c - 2\boldsymbol{w}\cdot\Delta\mathbf{P},\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\Delta \mathrm{E}_c^* = \Delta \mathrm{E}_c$ pourvu que *la quantité de mouvement totale soit conservée* lors du choc : $\Delta\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

Or, dans le cas du camion, on ne s'est guère soucié de quantité de mouvement. En réalité, le camion peut accélérer *parce qu'il « pousse » la Terre tout entière derrière lui !*

Refaisons donc l'ensemble de nos calculs avec une masse terrestre M, grande mais non infinie. Nous prendrons la limite $[\mathrm{M} \to \infty]$ à la toute fin des calculs — plus précisément, la limite $[\mathrm{M}/m \to \infty]$.

Au début de l'« expérience », et dans le référentiel terrestre, le camion a une vitesse $\boldsymbol{v}$. À la fin de l'expérience, il a acquis une vitesse $\boldsymbol{v}'$. Quant à la Terre, elle a originellement une vitesse $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, puis, si l'on reste dans le même référentiel galiléen, une vitesse $\mathbf{V}' = \frac{m}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')$ (par conservation de la quantité de mouvement totale[4]). L'énergie cinétique du système au début est donc $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$ et, à la fin, elle vaut $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2 + \frac{1}{2}\mathrm{M}\mathbf{V}'^2$, ce qui donne une différence d'énergie cinétique

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{E}_c &= \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}^2) + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')^2\\ &= \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}'^2 - \boldsymbol{v}^2)\left[1 + \mathrm{o}\left(\frac{m}{\mathrm{M}}\right)\right].\end{aligned}$$

C'est cette différence d'énergie cinétique qui est dépensée en essence ! C'est donc bien elle qui nous importe et l'on constate que, à des termes négligeables près, c'est le premier raisonnement qui nous donne la solution correcte, soit $1,4$ litres.

Regardons maintenant ce qui se passe dans le référentiel du gendarme, animé d'une vitesse $\boldsymbol{w}$ par rapport à la Terre. Le camion a une vitesse initiale $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, et une vitesse finale $\boldsymbol{v}'^* = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w}$. La Terre a une vitesse initiale $\mathbf{V}^* = -\boldsymbol{w}$ et une vitesse finale $\mathbf{V}'^* = -\boldsymbol{w} + \frac{m}{\mathrm{M}}'(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')$. Ainsi, la différence d'énergie cinétique est

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{E}_c^* &= \frac{1}{2}m\big(\boldsymbol{v}'^{*2} - \boldsymbol{v}^{*2}\big) + \frac{1}{2}\mathrm{M}\big(\mathbf{V}'^{*2} - \mathbf{V}^{*2}\big)\\ &= \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{w})^2 - \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})^2\\ &\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{M}\left[\frac{m}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') - \boldsymbol{w}\right]^2 - \frac{1}{2}\mathrm{M}\boldsymbol{w}^2\\ &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')\cdot\boldsymbol{w}\\ &\qquad + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')^2 - m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')\cdot\boldsymbol{w}\end{aligned}$$

soit

$$\Delta \mathrm{E}_c^* = \Delta \mathrm{E}_c.$$

On a donc bien la même différence d'énergie cinétique, comme attendu ; et donc, même dans ce référentiel, un calcul « propre » montre que la quantité d'essence à utiliser est la même.

Ce qu'avait oublié le gendarme, c'est donc le terme $-m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')\cdot\boldsymbol{w}$, qui est *positif*, et qui correspond à la différence d'énergie cinétique de la Terre dans son référentiel galiléen. Ce terme ne tend pas vers 0 lorsque $[\mathrm{M}/m \to \infty]$!

Il faut donc, vu depuis le référentiel du gendarme, 0,2 litre pour accélérer le camion et 1,2 litres pour accélérer la Terre !

On peut récapituler dans un tableau (C : camion, T : Terre) :

[4] Notons alors que le référentiel terrestre n'est pas un référentiel galiléen, puisque la Terre s'est mise à « bouger » sous l'impulsion du camion.

	Vitesse initiale	Vitesse finale	E_c init.	E_c finale	ΔE_c
C	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}'$	$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$	$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2$	$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}'^2-\boldsymbol{v}^2)+\frac{1}{2}\frac{m^2}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')^2$
T	$\boldsymbol{0}$	$\frac{m}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')$	0	$\frac{1}{2}\frac{m^2}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')^2$	
C*	$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{w}$	$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})^2$	$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{w})^2$	$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}'^2-\boldsymbol{v}^2)+\frac{1}{2}\frac{m^2}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')^2$
T*	$-\boldsymbol{w}$	$\frac{m}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')-\boldsymbol{w}$	$\frac{1}{2}\mathrm{M}\boldsymbol{w}^2$	$\frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{m}{\mathrm{M}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')-\boldsymbol{w}\right)^2$	

(Illustration © Craig THOMPSON 2001)

Fig. 0.1 — Roméo, Juliette et la barque sont sur le lac.

Fig. 0.2 — Roméo s'est rapproché.

Le deuxième paradoxe se résout exactement de la même manière : il faut tenir compte de l'énergie de rebond de la Terre après le choc avec la balle.

II.c Roméo, Juliette et les fluides visqueux

Voici un exemple de mécanique où une certaine fonction $f(x)$ est définie sur $[0,+\infty[$, mais où $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$.

Considérons une belle après-midi d'été, que Roméo et Juliette ont décidé de consacrer à une promenade lacustre, barquesque, et plutôt pas trop sportive. Ils sont donc assis d'un côté et de l'autre de la barque, qui est immobile sur l'eau. L'atmosphère étant propice aux chuchotis dans l'oreille, Roméo décide de se lever et de s'asseoir aux côtés de Juliette.

On notera M la masse de l'ensemble « barque + Juliette », m celle de Roméo, L la longueur du trajet entre un bout de la barque et l'autre (voir figures 0.1 et 0.2).

On considère enfin deux cas : celui où les frottements sur l'eau sont négligés (fluide parfait) et celui où ils sont donnés par la formule $f = -\eta v$, où f est la force exercée par le lac sur le bateau, v la vitesse du bateau sur l'eau et η un coefficient de viscosité. On se limitera à une étude *unidimensionnelle* sur un axe horizontal.

On cherche maintenant à calculer le déplacement total ℓ du bateau, une fois que tout est au repos,

1. dans le cas $\eta = 0$;
2. dans le cas $\eta \neq 0$.

Le premier cas est très facile. On sait en effet que, aucune force ne s'exerçant dans le plan horizontal sur l'ensemble « barque + Roméo + Juliette », le centre de gravité de celui-ci est immobile durant toute l'expérience. Comme Roméo se déplace d'une distance L par rapport au bateau, il est facile de voir que celui-ci doit se déplacer, dans l'autre sens, d'une distance

$$\ell = \frac{m}{m+\mathrm{M}}\mathrm{L}.$$

Dans le deuxième cas, notons $x(t)$ la position de la barque et $y(t)$ celle de Roméo (relativement à la Terre, non à la barque). L'équation du mouvement du centre de gravité du système est

$$\mathrm{M}\ddot{x} + m\ddot{y} = -\eta\dot{x}.$$

Intégrons maintenant entre $t = 0$ (avant le début du déplacement de Roméo) jusqu'à $t = +\infty$. À cause du frottement visqueux, on sait qu'à $[t \to +\infty]$, la vitesse de la barque tendra vers zéro (et donc celle de Roméo aussi, puisqu'il sera depuis longtemps immobile par rapport à la barque). On aura donc

$$(\mathrm{M}\dot{x} + m\dot{y})\Big|_0^{+\infty} = 0 = -\eta\big(x(+\infty) - x(0)\big)$$

soit $\eta\ell = 0$. Puisque $\eta \neq 0$, on a donc $\ell = 0$, et ceci quelle que soit la façon dont Roméo a effectué son mouvement. Notamment, si l'on prend une limite de fluide non visqueux, on trouve

$$\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta>0}} \ell(\eta) = 0 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta>0}} \ell(\eta) \neq \ell(0).$$

Conclusion : La limite d'un fluide non visqueux est singulière. On ne peut pas prendre formellement la limite où la viscosité tend vers zéro pour obtenir le cas du fluide parfait. Notamment, des écoulements de fluides parfaits non visqueux sont beaucoup mieux modélisés par des fluides réels *extrêmement visqueux* que par des fluides peu visqueux, dans lesquels des phénomènes de turbulence apparaissent plus facilement. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'excellent ouvrage de MM. Guyon, Hulin et Petit : *Hydrodynamique physique.*

Remarque 0.1 La forme exacte de la force de frottement visqueux $f = -\eta v$ est cruciale pour obtenir ce résultat. Des non-linéarités changent irrémédiablement le résultat. Il y a donc fort à parier que l'expérience, si vous décidez de la mener, ne sera pas concluante, et que la barque ne reviendra pas exactement au même endroit. Que cela n'empêche pas de profiter du moment.

III LES HÔTELS INFINIS DE HILBERT

Considérons un hôtel *normal*, c'est-à-dire possédant un nombre n, entier naturel, de chambres. Si toutes les chambres sont occupées et que, par une nuit d'hiver, un voyageur arrive, celui-ci ne pourra pas loger dans l'hôtel.

Si en revanche on considère un hôtel de Hilbert, possédant un nombre infini et dénombrable de chambres, indexées par $\mathbb{N}^*$, la situation est différente. Supposons que toutes les chambres sont occupées. Cela veut donc dire qu'il y a un occupant dans la chambre n°1, un autre dans la n°2, un autre dans la n°3, etc. Supposons maintenant que, par cette même nuit d'hiver, un voyageur égaré sonne à la réception de l'hôtel en demandant à se loger. « Pas de problème », dit le réceptionniste, et il envoie un message à chacun des occupants : « l'occupant de la chambre n est prié de se déplacer jusqu'à la chambre $n+1$. » Ainsi, chaque client de l'hôtel récupère une nouvelle chambre, et de plus le voyageur perdu peut occuper la chambre n°1 qui s'est libérée.

On peut même faire mieux : supposons qu'un *car infini* (dénombrable) de touristes arrive à l'hôtel. Il suffit alors de demander à l'occupant de la chambre n de déménager jusqu'à la chambre $2n$. Ainsi, toutes les chambres impaires sont libérées, et on peut loger tous les touristes.

Jeu : comment faire pour loger une infinité de cars infinis de touristes ? (Indication : utiliser par exemple la décomposition des entiers en nombres premiers.)

IV LA DIAGONALE DE CANTOR

IV.a Le résultat de Cantor

Pour commencer, nous devons faire un tour vers les ensembles infinis — et montrer qu'il existe plusieurs sortes d'infinis mathématiques, dont certains sont plus « grands » que d'autres.

Les problèmes liés à l'infini sont nombreux, qu'ils soient de nature technique ou conceptuelle. On connaît dans l'histoire de la pensée de nombreux cas où une mauvaise compréhension du concept d'infini donna lieu à des résultats plus ou moins loufoques[5]. Un grand pas fut franchi au début du siècle lorsque Cantor formalisa la théorie des ensembles, et notamment des ensembles infinis. Une petite parenthèse technique va être nécessaire. Supposons que nous ayons deux ensembles, que j'appellerai A et B. Chacun de ces ensembles contient des éléments, et j'aimerais savoir lequel « est le plus grand ». Pour cela, il nous faut revenir aux méthodes préhistoriques : je prends un élément de A et un élément de B, et je les associe. Puis je continue jusqu'à épuisement d'un des deux ensembles. Si l'un des ensembles est épuisé avant l'autre, il est alors déclaré « le plus petit ». Si en revanche on peut, à chaque élément de A, associer un et un seul élément de B (ce qu'on appelle une *bijection* entre A et B), on pourra dire au contraire que « A est aussi grand que B. » On dira alors que « le cardinal de A est égal à celui de B. » Cette procédure, pour simple qu'elle soit, va nous permettre de classer, par ordre croissant, des infinis différents. C'est en effet une des heureuses surprises des mathématiques que de pouvoir présenter des infinis dont certains sont *plus grands* que d'autres.

Commençons d'abord par un exercice simple : montrons qu'il existe autant de nombres entiers que de nombres entiers *pairs*, c'est-à-dire que les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ ont même cardinal. Pour cela, il suffit de trouver une bijection entre le premier et le deuxième, ce qui est facile : il suffit d'associer à chaque nombre n du premier ensemble le nombre $2n$, qui appartient bien au deuxième ensemble. Ainsi, à 1 on associe 2, à 2 on associe 4, à 3 on associe 6, et ainsi de suite. On voit que chacun des nombres de A est, de manière unique, associé à un nombre de B, ce qui est la condition souhaitée. C'est une des premières surprises des infinis : bien que B semble « deux fois plus petit » que A, il a en réalité exactement le même nombre d'éléments (qui est infini.) Ce premier infini, que l'on appelle « puissance du dénombrable » (car il est le cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers) est noté fréquemment $\aleph_0$.

Montrons maintenant que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres *réels* est « plus gros » que l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers. En fait, nous allons même montrer que l'ensemble des réels de $[0\,;1[$ est plus grand que $\mathbb{N}$. Pour cela, nous allons utiliser la méthode proposée par Cantor lui-même, et procéder par l'absurde : nous supposons d'abord qu'il existe une bijection entre $[0\,;1[$ et $\mathbb{N}$, puis nous montrons qu'on aboutit à une absurdité ; en conséquence, la dite bijection ne saurait exister. Voici comment procéder : grâce à la bijection supposée entre $[0\,;1[$ et $\mathbb{N}$, nous pouvons écrire tous les nombres réels en les ordonnant par leur entier associé, ce qui nous donne quelque chose comme ceci :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & \longmapsto & 0, & \mathbf{2} & 3 & 8 & 5 & 1 & 0 & 6 & 4 & \ldots \\
2 & \longmapsto & 0, & 4 & \mathbf{8} & 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & \ldots \\
3 & \longmapsto & 0, & 6 & 3 & \mathbf{7} & 2 & 9 & 5 & 4 & 1 & \ldots \\
4 & \longmapsto & 0, & 1 & 6 & 2 & \mathbf{4} & 4 & 2 & 8 & 0 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Construisons maintenant un nouveau nombre, que j'appellerai x, de la manière suivante : on commence par écrire un zéro et la virgule, ensuite le premier chiffre après la vir-

[5] Que l'on repense à Zénon d'Élée qui croyait avoir démontré l'impossibilité du mouvement. Son argument était qu'une flèche, avant d'atteindre la cible, devait d'abord accomplir la moitié du trajet, puis la moitié du reste, puis la moitié du reste, et ainsi de suite. Il faut donc un temps infini pour atteindre la cible, puisqu'il faut ajouter une infinité de temps les uns aux autres... Zénon croyait donc qu'ajouter une infinité de nombres $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...)$ donne obligatoirement un nombre infini. Les techniques « modernes » de sommation indiquent que la valeur de la somme de cette infinité de nombres est en réalité exactement égale à 1.

gule de x peut être n'importe quoi sauf le premier chiffre après la virgule du nombre associé à 1 (donc, dans notre exemple, tout sauf 2) ; le deuxième chiffre après la virgule de x sera n'importe quoi sauf le deuxième chiffre après la virgule du nombre associé à 2 (donc tout sauf 8), et ainsi de suite...[6] Comme le nombre obtenu est compris entre 0 et 1, il est nécessairement associé à un nombre entier par notre bijection. Oui, mais... il ne peut pas être associé à 1, puisqu'il diffère du premier nombre au moins par le premier chiffre après la virgule ; il ne peut pas non plus être associé à deux, puisqu'il diffère du deuxième nombre par le deuxième chiffre après la virgule, et ainsi de suite. Il ne peut donc être associé à aucun entier, ce qui est en contradiction avec ce que l'on vient de dire[7]. Conclusion : l'hypothèse que la bijection existe conduit à une impasse, il faut la rejeter. Nous venons de montrer que le cardinal de $[\,0\,;1\,[$ et celui de $\mathbb{N}$ ne sauraient être égaux. En poussant un peu le raisonnement, on montre facilement que le cardinal de $\mathbb{N}$ est *plus petit* que celui de $[\,0\,;1\,[$.

Ainsi, il y aura *davantage* de nombres réels entre 0 et 1 qu'il n'existe de nombres entiers, et nous avons donc un nouvel infini, plus grand que $\aleph_0$. On peut montrer que ce nouvel infini est également le cardinal de *tous* les nombres réels. On le note C, comme « puissance du Continu ».

IV.b Application : la majorité des nombres est innommable

Or ceci va avoir une conséquence surprenante sur les noms des nombres. En effet, nommer les nombres, c'est leur adjoindre à chacun un signe qui lui sera unique : c'est établir une bijection entre l'ensemble des nombres nommés et un ensemble de noms, chaque nom étant une suite finie de symboles, comme « quarante-deux » ou « XLII »[8] (on ne peut pas accepter comme nom une suite infinie de symboles, car ce nom n'est pas utilisable d'un point de vue opératoire.) Maintenant, la langue française écrite, ou toute autre, utilise par ailleurs un nombre *fini* de signes. Il est facile de montrer alors que l'ensemble des suites finies de symboles d'un alphabet fini est *dénombrable*, c'est-à-dire qu'il a le même nombre d'éléments que $\mathbb{N}$. En conséquence de quoi l'immense majorité des nombres réels (qui sont eux indénombrables, leur cardinal ayant la puissance du continu) sont *innommables*.

IV.c L'hypothèse du continu

Nous avons vu que l'ensemble des réels est strictement plus grand que l'ensemble des entiers. Une question naturelle est alors : *existe-t-il des ensembles qui soient* plus grands *que* $\mathbb{N}$, *mais cependant* plus petits *que* $\mathbb{R}$ *?* Cantor pensait que la réponse était négative (ce qu'on appelle couramment l'*hypothèse du continu*), mais n'avait pas de preuve. On note habituellement $\aleph_1$ le plus petit cardinal infini qui suit $\aleph_0$. L'hypothèse du continu (voir plus bas) revient donc à postuler que $\mathrm{C} = \aleph_1$. (On peut également trouver d'autres infinis — notés $\aleph_2$, $\aleph_3$, etc. — qui sont tous différents, et rangés par ordre croissants.)

La réponse est certainement des plus surprenantes : cette proposition est *indécidable*, c'est-à-dire qu'il ne saurait exister aucune démonstration de sa véracité, pas plus qu'il ne saurait exister de démonstration de sa fausseté[9]. Qu'est-ce à dire ?

Pour bien comprendre l'implication profonde de ce résultat, il faut revenir à la façon dont les mathématiciens travaillent. La méthode employée, depuis les travaux fondateurs d'Euclide, est la *méthode axiomatique.* On considère un certain nombre d'affirmations qu'on *ne cherche pas à démontrer* mais qui sont admises, et que l'on appelle *axiomes*[10]. À partir de ces axiomes, on peut, en suivant des règles logiques, en déduire d'autres propositions, appelés *théorèmes.* On choisit les axiomes pour pouvoir décrire le plus de choses possibles avec un maximum d'efficacité ; en un mot, on essaye de ne garder qu'un nombre minimal d'axiomes.

Or voici : si les axiomes actuellement utilisés sont cohérents entre eux, c'est-à-dire s'ils n'engendrent pas de contradiction (on dit qu'ils sont *consistants*), alors on peut leur adjoindre comme axiome supplémentaire soit l'hypothèse du continu, soit la négation de l'hypothèse du continu, et le nouvel ensemble d'axiomes reste consistant. Ce qui veut dire qu'il existe alors deux mathématiques différentes, que l'on peut choisir selon son goût : celle où l'hypothèse du continu est vraie, celle où elle est fausse.

Le lecteur peut alors, à l'instar de nombreux mathématiciens, ressentir une certaine frustration devant l'impossibilité (intrinsèque) de démontrer l'hypothèse du continu ou sa négation. Mais, depuis Gödel[11], on sait que ce genre d'événements n'est pas accidentel, mais est au contraire monnaie courante : quel que soit le système axiomatique consistant que l'on choisisse pour bâtir les mathématiques (du moins s'il est assez sophistiqué pour comprendre au moins une description des nombres entiers), il existera toujours des propositions indécidables. Rajouter ces propositions (ou leur négation) comme nouveaux axiomes ne fait que déplacer le problème, car d'autres propositions seront encore indécidables.

[6] Dans notre exemple, on peut très bien choisir, disons, $x = 0,3562\ldots$

[7] Il y a une toute petite erreur, bénigne, dans ce raisonnement, car on n'a pas tenu compte du fait que certains nombres peuvent s'écrire de deux manière différentes, comme $0,299999999\ldots$ (avec une infinité de « 9 ») et $0,3$ qui sont *strictement égaux.* La démonstration peut être faite proprement en tenant compte de ce fait, (il suffit de banir l'écriture des nombres avec une infinité de « 9 » dans la colonne de droite et, à chaque étapte, choisir un chiffre différent de celui de la diagonale *et de* 9) ; la démonstration est alors correcte et le résultat est bien sûr identique.

[8] On peut bien évidemment prendre une succession de noms n'ayant aucun rapport les uns avec les autres et désigner, comme le fait *Funes el memorioso*, le nombre sept mille treize par *Máximo Pérez* et sept mille quatorze par *Le chemin de fer*, malgré le manque évident de facilité d'utilisation (cf. *Ficciones* de Jorge Luis Borges.) Un petit jeu mathématique pour les lecteurs de Borges : montrer que le catalogue de la Bibliothèque de Babel — qui comprend tous les livres possibles de quatre cent dix pages, chaque page ayant quarante lignes de quatre-vingt caractères, les caractères étant pris dans un alphabet de vingt-cinq symboles — ne saurait être plus petit que la Bibliothèque elle-même et donc *a fortiori*, et contrairement à ce que suggère l'auteur, ne saurait tenir en un seul volume du même format.

[9] Résultat dû à P. Cohen en 1963.

[10] Pour donner une idée, les axiomes sur lesquels sont construits toutes les mathématiques modernes sont du genre « 0 est un nombre », « Tout nombre possède un successeur », « Il existe des ensembles infinis »,... toutes choses qui paraissent raisonnables à la communauté.

[11] Le lecteur curieux pourra avec profit, et ce même s'il ne connaît pas les mathématiques, lire *Le théorème de Gödel*, par Nagel, Newman, Gödel et Girard, éditions du Seuil.

Les paradoxes sur l'énergie cinétique et l'exemple de la barque sont tirés de Mathématiques pour la physique et les physiciens*, Éd. H& K.*