Mines Physique 2 MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Amélie Gay (ENS Lyon) ; il a été relu par Pierre Monteiller (ENS Ulm) et Tom Morel (professeur en CPGE).

Ce problème s'intéresse à l'atome de deutérium, isotope stable de l'hydrogène, ainsi qu'à son noyau. Les trois parties sont indépendantes.

- La première partie porte sur la répartition du deutérium dans les océans terrestres. Il s'agit d'exploiter la proportion en nombre d'atomes de deutérium océanique ainsi que la composition de l'eau lourde et de l'eau semi-lourde par des raisonnements physiques.
- La deuxième partie propose, dans un premier temps, d'étudier les raies d'émission des atomes de deutérium et d'hydrogène à partir des énergies de l'électron. Dans un second temps, on étudie l'élargissement par l'agitation thermique des raies d'émission de l'hydrogène. Ceci permet de déterminer les conditions de séparation des raies d'émission des atomes de deutérium et d'hydrogène par spectroscopie. Cette partie exploite les changements de référentiel en mécanique classique et la thermodynamique statistique.
- La dernière partie s'intéresse à l'étude quantique des interactions à force centrale entre deux particules. Les résultats sont ensuite appliqués au cas du noyau de deutérium. Quasiment toutes les notions de la physique quantique au programme sont nécessaires pour traiter cette partie.

Ce sujet est de difficulté croissante. Il commence par de petits raisonnements physiques pour ensuite laisser place à des calculs de mécanique quantique qui occupent la moitié du sujet. Il permet aussi de s'entraîner à faire des calculs sans l'aide de la calculatrice puisqu'elle était interdite pendant l'épreuve.

Indications

3 Calculer les probabilités qu'un atome d'oxygène soit lié à un atome d'hydrogène ou à un atome de deutérium.

5 Utiliser la relation de Planck-Einstein.

6 Ne pas confondre λ_n (avec m'_e) avec λ_n (avec m_e) de la question 5.

8 Remarquer que les deux référentiels sont en translation.

9 Il s'agit d'une onde électromagnétique dans le vide.

10 La distribution de Boltzmann fait intervenir le rapport de l'énergie du système sur l'énergie thermique.

13 Un point d'inflexion est déterminé par une dérivée seconde nulle.

14 Le nombre d'atomes dont la composante V_x prend une valeur entre V_x et $\mathrm{V}_x+\mathrm{dV}_x$ est égal au nombre de pulsations comprises entre ω_app et $\omega_\mathrm{app} + \mathrm{d}\omega_\mathrm{app}$.

17 Faire une séparation des variables pour avoir d'un côté une fonction de r et de l'autre une fonction de θ et φ. Les deux fonctions sont égales si elles sont constantes.

20 Même idée qu'à la question 17.

22 Faire le changement de variable $x = \cos\theta$ dans l'équation vérifiée par Θ.

24 Exprimer la continuité de ψ et de sa dérivée.

25 La première relation est issue des conditions de la question 24 et la seconde doit faire apparaître ρ par combinaison de k et K.

30 Trouver la valeur de Y associée à $\mathrm{V}_0 = \mathrm{V}_\mathrm{min}$.

32 Faire un développement limité en $\pi/2$ de la relation obtenue à la question 25 à partir des conditions de continuité.

33 Ne pas oublier la conversion des eV en J.

Et pour un neutron de plus...

1 Plaçons-nous dans un volume d'eau représentatif de l'abondance naturelle de deutérium dans les océans et notons m_{H} et m_{D} respectivement les masses d'hydrogène et de deutérium. La proportion de deutérium dans l'hydrogène océanique $\mathrm{P_D}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{P_D} &= \frac{m_{\mathrm{D}}}{m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{H}}} \\ &= \frac{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}} + 6\,420\,(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}})}\end{aligned}$$

En utilisant les approximations proposées par l'énoncé, $m_{\mathrm{p}} \simeq m_{\mathrm{n}}$ et $m_{\mathrm{e}} \ll m_{\mathrm{p}}$,

$$\mathrm{P_D} \simeq \frac{2}{6\,422} = \frac{1}{3\,211}$$

Pour l'application numérique, utilisons le fait que $100/32 \simeq 3{,}1$. D'où

$$\boxed{\mathrm{P_D} \simeq \frac{100}{32} \cdot 10^{-2-2} \simeq 0{,}03\,\%}$$

2 La proportion en masse du deuton dans le deutérium $\mathrm{P_d}$ est, où m_{d} désigne la masse du deuton,

$$\mathrm{P_d} = \frac{m_{\mathrm{d}}}{m_{\mathrm{D}}} = \frac{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{n}} + m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}}$$

Avec $m_{\mathrm{e}} \ll m_{\mathrm{p}}, m_{\mathrm{n}}$,
$$\boxed{\mathrm{P_d} \simeq 1}$$

Le noyau contient quasiment toute la masse du deutérium comme pour l'hydrogène.

3 La proportion en molécules d'eau semi-lourde HDO dans les océans, $\mathcal{P}_{\mathrm{HDO}}$, est la probabilité de trouver HDO dans l'océan. On suppose que **cette probabilité est seulement déterminée par la probabilité de trouver un atome d'hydrogène $\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$ ou un atome de deutérium $\mathcal{P}_{\mathrm{D}}$ dans le milieu, c'est-à-dire qu'on néglige tous les phénomènes d'interaction entre les atomes et les molécules**. Donc,

$$\mathcal{P}_{\mathrm{HDO}} = \mathcal{P}_{\mathrm{H}} \times \mathcal{P}_{\mathrm{D}}$$

Soit
$$\mathcal{P}_{\mathrm{HDO}} = \frac{6\,420}{6\,421} \times \frac{1}{6\,421} \simeq \frac{1}{6421}$$

Or on sait, d'après la question 1, que $100/64 \simeq 1{,}6$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{HDO}} \simeq \frac{100}{64} \cdot 10^{-2-2} \simeq 0{,}02\,\%}$$

Appliquons le même raisonnement pour la proportion en molécules d'eau lourde $\mathrm{D_2O}$ dans les océans :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{D_2O}} = {\mathcal{P}_{\mathrm{D}}}^2$$

D'où
$$\mathcal{P}_{\mathrm{D_2O}} = \left(\frac{1}{6\,421}\right)^2$$

Or, d'après la question 3, $(100/64)^2 \simeq 1{,}6^2 \simeq 2{,}6$. D'où

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{D_2O}} \simeq \left(\frac{100}{64}\right)^2 \cdot 10^{2\times(-2-2)} \simeq 3 \cdot 10^{-8}}$$

4 Comme applications industrielles, on peut citer :

- la fission nucléaire où l'eau lourde est utilisée comme agent de régulation des neutrons produits par la réaction ;
- la RMN du proton où elle est utilisée dans les solvants pour ne pas perturber la mesure.

5 D'après la relation de Planck-Einstein,

$$\Delta \mathrm{E}_n = \frac{hc}{\lambda_n}$$

Avec pour $n > 2$,

$$\Delta \mathrm{E}_n = \mathrm{E}_n - \mathrm{E}_2 = -\frac{\mathrm{E}_0}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\,hc}{\mathrm{E}_0}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)^{-1}}$$

Calculons le préfacteur

$$\frac{2\,hc}{\mathrm{E}_0} = \frac{2 \times 6{,}6 \times 3{,}0}{2 \times 13{,}6 \times 1{,}6} \cdot 10^{-34+8+19} \simeq 1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

L'application numérique donne alors

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{36}{5} \cdot 10^{-7} = 7 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} \qquad \text{et} \qquad \lambda_4 = \frac{16}{3} \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}}$$

Ces deux longueurs d'onde appartiennent au **domaine du visible**.

> La quantité 1 eV correspond à l'énergie électrostatique ($\mathrm{E}_{\text{él}} = q\mathrm{V}$) gagnée lorsqu'une unité de charge électrique e est déplacée entre deux points dont le potentiel électrostatique diffère d'un volt.

6 D'après la question précédente, il vient, en notant $\alpha = \dfrac{2hc\,(4\,\pi\,\varepsilon_0)^2}{e^4}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{n^2}\right)^{-1}$,

$$\lambda_n = \alpha\,\frac{1 + m_\mathrm{e}/m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad \lambda'_n = \alpha\,\frac{1 + m_\mathrm{e}/\left(m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n}\right)}{m_\mathrm{e}}$$

L'écart relatif entre les deux longueurs d'onde s'écrit donc

$$\delta = \left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n}} - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\right)\left(1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\right)^{-1}$$

Or $m_\mathrm{e} \ll m_\mathrm{p}$ et $m_\mathrm{n} \simeq m_\mathrm{p}$,

$$\boxed{\delta \simeq -\frac{m_\mathrm{e}}{\kappa\,m_\mathrm{p}} \quad \text{avec} \quad \kappa = 2}$$

Numériquement, avec $9{,}1/1{,}7 = 5{,}3$, on a

$$\boxed{\delta \simeq -\frac{9{,}1}{2 \times 1{,}7} \cdot 10^{-31+27} \simeq -3 \cdot 10^{-4}}$$

L'écart relatif entre les deux longueurs d'onde est extrêmement faible ce qui indique qu'il est **impossible de faire la différence entre le deutérium et l'hydrogène avec un spectromètre UV/visible de travaux pratiques**.

7 La loi de composition des vitesses s'écrit