X Maths B MP 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthias Moreno Ray (professeur en CPGE) ; il a été relu par Émilie Liboz (professeur en CPGE) et Guillaume Batog (professeur en CPGE). L'auteur remercie Denis Choimet pour son aide précieuse.

Le problème étudie des inégalités fonctionnelles issues de la théorie des lois de probabilités continues. Une loi continue sur $\mathbb{R}$ est définie à partir d'une mesure $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, positive, intégrable et d'intégrale valant 1 sur $\mathbb{R}$. Le problème met en valeur le rôle de la mesure gaussienne $\mu(x) = \mathrm{e}^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ pour $x \in \mathbb{R}$, qui correspond à la loi normale centrée d'écart-type $1/\sqrt{2}$. Les inégalités à démontrer portent sur la variance $\mathrm{Var}_m(f)$ et l'entropie $\mathrm{Ent}_m(f)$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue relativement à une mesure m. Ces quantités sont définies en cas d'intégrabilité par

$$\mathrm{Var}_m(f) = \mathrm{E}_m(f^2) - \big(\mathrm{E}_m(f)\big)^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ent}_m(f) = \mathrm{E}_m(h \circ f^2) - h\big(\mathrm{E}_m(f^2)\big)$$

avec $\qquad \forall\, x > 0 \quad h(x) = x \ln x \qquad$ et $\qquad \mathrm{E}_m(g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)m(x)\,\mathrm{d}x$

pour g continue intégrable sur $\mathbb{R}$.

- La partie préliminaire établit des liens entre l'intégrabilité d'une fonction sur $\mathbb{R}$ et l'existence d'une variance ou d'une entropie. On y caractérise également les fonctions d'entropie nulle dans le cas d'une mesure qui ne s'annule pas. Les questions sont proches de démonstrations du cours.
- La partie I étudie la mesure μ. On introduit un opérateur différentiel L et un opérateur intégral Φ qui présentent des propriétés d'invariance vis-à-vis de μ (caractère symétrique de L, invariance de la moyenne par Φ). Certaines questions sont techniques et utilisent plusieurs théorèmes relatifs aux intégrales à paramètres.
- La partie II prolonge la précédente en établissant que, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_b^2$ (de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à dérivées bornées sur $\mathbb{R}$), on a $\mathrm{Ent}_\mu(f) \leqslant \mathrm{E}_\mu({f'}^2)$.
- La partie III s'intéresse à l'inverse aux mesures m vérifiant $\mathrm{Ent}_m(f) \leqslant \mathrm{E}_m({f'}^2)$ pour $f \in \mathscr{C}_b^1$. D'une part, on montre que $\mathrm{Var}_m(f) \leqslant \mathrm{E}_m({f'}^2)/2$. D'autre part, on établit que $x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha\, x^2}\, m(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha < 1$. Si cette fonction est de plus bornée, cela implique que m est dominée par la mesure gaussienne μ au voisinage de l'infini.
- La partie IV est indépendante et se termine par une majoration de la probabilité, pour la mesure μ, qu'un réel soit à distance au moins t d'une union finie d'intervalles donnés.

Ce problème couvre plusieurs points du programme d'analyse : les intégrales à paramètre, les intégrales généralisées et plusieurs inégalités fondamentales de l'analyse (convexité, accroissements finis, Cauchy-Schwarz, Taylor reste intégrale). Quelques questions portent sur l'étude de fonctions auxiliaires à deux variables.

Il constitue un bon test des capacités de rédaction et de persévérance, certaines questions demandant de lier de nombreux résultats intermédiaires entre eux. Bien que des formules-étapes non fournies par l'énoncé soient vitales pour résoudre les questions de synthèse, suffisamment de résultats sont donnés pour que l'on puisse poursuivre l'étude du problème sans l'avoir entièrement résolu.

Indications

Préliminaires

1 Pour l'intégrabilité de $f\,m$, utiliser la majoration de $|u|$ par u^2+1 valable pour tout réel u. Pour la deuxième partie de la question, calculer la variance de la fonction $f - \displaystyle\int f(x)\,m(x)\,\mathrm{d}x$.

2a Montrer que, pour tout réel u positif, $u-1 \leqslant h(u)$ et évaluer cette inégalité en $f(x)^2$.

2c Dans le cas où $a>0$, utiliser l'indication de l'énoncé. Dans le cas où $a=0$, montrer que $\mathrm{Ent}_m(f)=0$.

2d Montrer que $\mathrm{Ent}_m(f)=0$ si, et seulement si, f est constante.

Partie I

3b Remplacer $\mathrm{L}h_2$ par l'expression obtenue à la question 3a. Effectuer ensuite une intégration par parties.

4 Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale.

5a Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour montrer l'existence et obtenir l'expression des dérivées partielles. Utiliser ensuite le théorème de continuité sous le signe intégrale pour justifier que ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

5b Déduire la formule demandée de l'expression de $\partial_x\Phi_f$ obtenue à la question 5a.

5c Calculer d'une part $\mathrm{L}\Phi_f(t,x)$ grâce aux résultats des questions 5a et 5b. Transformer d'autre part l'expression de $\partial_t\Phi_f$ obtenue à la question 5a en intégrant par parties (primitiver $y \longmapsto y\,\mu(y)$ et dériver $y \longmapsto f'(x\,\cos(t)+y\,\sin(t))$).

5d Montrer que $t \longmapsto \displaystyle\int \Phi_f(t,x)\,\mu(x)\,\mathrm{d}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle.

Partie II

6 Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale.

7a Justifier que J est de classe $\mathscr{C}^1$ grâce au théorème de dérivation sous le signe intégrale. Simplifier ensuite l'expression de J' grâce à la question 3b.

7b Reconnaître une inégalité de Cauchy-Schwarz.

7c Exprimer l'accroissement de J entre 0 et $\pi/2$ sous forme d'une intégrale et le majorer grâce aux questions 7b et 5d.

8 Suivre l'indication de l'énoncé. Utiliser le théorème de convergence dominée pour calculer les limites lorsque $\delta \to 0$.

Partie III

10a Composer f par une fonction affine pour se ramener à $\displaystyle\int f(x)\,m(x)dx = 0$ et $\mathrm{Var}_m(f)=1$.

10b Appliquer à la fonction h la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 4. Montrer que le reste intégrale est positif. Évaluer l'inégalité obtenue en $\varepsilon f(y)$ avec y réel et ε voisin de zéro.

11a Utiliser l'inégalité (1) de l'énoncé avec $g(x)=\mathrm{e}^{\lambda\,f(x)/2}$.

11b Calculer la dérivée de $\ln \mathrm{H}(\lambda)/\lambda$ et majorer avec la question 11a. Intégrer l'inégalité obtenue sur le segment $[\,\varepsilon\,;\lambda\,]$ avec $\varepsilon > 0$. Montrer que $\ln \mathrm{H}(\varepsilon)/\varepsilon$ tend vers $\mathrm{H}'(0)$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

12 Suivre l'indication de l'énoncé. Utiliser le théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$ pour justifier que

$$\int f_n(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int x\, m(x)\, \mathrm{d}x$$

Montrer que $\forall\, \mathrm{A} > 0 \quad \displaystyle\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{\lambda\, f_n(x)}\, m(x)\, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{\lambda\, f(x)}\, m(x)\, \mathrm{d}x$

Utiliser enfin que $\quad \displaystyle\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{\lambda\, f_n(x)}\, m(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int \mathrm{e}^{\lambda\, f_n(x)}\, m(x)\, \mathrm{d}x$

et l'inégalité (3) de l'énoncé.

13a Prendre $\lambda = 2(a - \mathrm{M})/\mathrm{C}$ et utiliser la question 12.

13b Justifier que la fonction $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} m(t)\, \mathrm{d}t$ est une primitive de $-m$ sur $\mathbb{R}$. Utiliser φ pour effectuer une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{\alpha\, x^2}\, m(x)\, \mathrm{d}x$. Majorer les termes obtenus pour justifier l'intégrabilité de la fonction sur $\mathbb{R}_+$. Appliquer ensuite ce résultat à la mesure $\widetilde{m}(x) = m(-x)$.

Partie IV

14a Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} p(t)\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante. Normaliser cette fonction pour obtenir une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]\,0\,;1\,[$.

14b Réaliser le changement de variable indiqué par l'énoncé. Minorer l'intégrale avec l'hypothèse (4) puis avec une inégalité de type $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

15b Poser $p(x) = \mathrm{e}^{\,d(x,\mathrm{A})/2 - x^2}$, $q(x) = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ et $r(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et utiliser la question 15a.

16a Si I est un intervalle, alors I_t est un intervalle, pour t réel.

Préliminaires

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|f(x)| \geqslant 1$ alors $|f(x)| \leqslant f(x)^2$. On a donc dans tous les cas

$$|f(x)| \leqslant f(x)^2 + 1 \qquad \text{d'où} \qquad |f(x)|\, m(x) \leqslant f(x)^2\, m(x) + m(x)$$

Supposons que f admette une variance relativement à m. Dans ce cas, la fonction $f^2\, m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par définition d'une mesure, la fonction m est intégrable sur $\mathbb{R}$. L'inégalité précédente prouve donc que

$$\boxed{\text{Si } f \text{ admet une variance relativement à } m\text{, alors } fm \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

Notons $\mathrm{I} = \displaystyle\int f(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(f(x) - \mathrm{I})^2\, m(x) = f(x)^2\, m(x) - 2\mathrm{I} f(x) m(x) + \mathrm{I}^2\, m(x)$$

ce qui prouve que $x \longmapsto (f(x) - \mathrm{I})^2\, m(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables. Il vient en outre, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int (f(x) - \mathrm{I})^2\, m(x)\, \mathrm{d}x &= \int f(x)^2\, m(x)\, \mathrm{d}x - 2\mathrm{I}\int f(x) m(x)\, \mathrm{d}x + \mathrm{I}^2 \int m(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int f(x)^2\, m(x)\, \mathrm{d}x - 2\mathrm{I}^2 + \mathrm{I}^2 \qquad \left(\text{car } \int m(x)\, \mathrm{d}x = 1\right)\end{aligned}$$

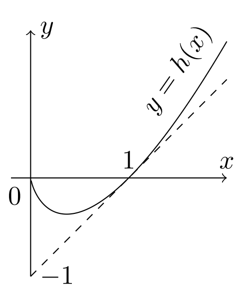
$$\int (f(x) - \mathrm{I})^2\, m(x)\, \mathrm{d}x = \int f(x)^2\, m(x)\, \mathrm{d}x - \mathrm{I}^2 = \mathrm{Var}_m(f)$$

Comme la fonction $x \longmapsto (f(x) - \mathrm{I})^2\, m(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale de gauche est positive, ce qui prouve que

$$\boxed{\mathrm{Var}_m(f) \geqslant 0}$$

> Comme f est continue et que $(f - \mathrm{I})^2$ est de signe constant, on peut observer que, dans le cas où m ne s'annule pas, la variance de f est nulle si et seulement si $(f - \mathrm{I})^2$ est nulle, ce qui équivaut à f constante.
>
> L'intégrabilité de $f\, m$ s'obtient aussi avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions $|f|\, \sqrt{m}$ et $\sqrt{m}$ dans l'espace préhilbertien
>
> $$\mathrm{E} = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \right\}$$
>
> muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$. Ce produit scalaire est bien défini sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ car
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x) g(x)| \leqslant (f(x)^2 + g(x)^2)/2$$
>
> L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $f\, \sqrt{m}$ et $\sqrt{m}$ montre ensuite la positivité de la variance.

2a Pour comparer f^2 et $h(f^2)$, étudions la fonction h. Elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, et pour $t > 0$, on a $h''(t) = 1/t$ qui est strictement positif. La fonction h est donc convexe. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = t - 1$ d'où



$$\forall t > 0 \qquad h(t) \geqslant t - 1$$

Cette inégalité est par ailleurs également vraie lorsque $t = 0$.

Pour toute fonction f, on a donc