

Mines Physique 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de trois parties qui ont pour fil conducteur l'étude des oscillations du Millenium Bridge, à Londres. D'importantes oscillations avaient conduit à sa fermeture, quelques jours seulement après son inauguration !

- La première partie propose une modélisation simple du pont. Le système est décrit à l'aide d'un oscillateur masse-ressort faiblement amorti. On analyse la réponse de ce système à un échelon, puis à un forçage sinusoïdal qui décrit l'excitation périodique due au passage d'un piéton sur la passerelle. L'étude de la réponse fréquentielle fait ressortir une résonance à la fréquence typique de la marche des piétons. Un dispositif mécanique est alors ajouté pour supprimer le phénomène de résonance. Pour pouvoir conclure quant à l'utilité de cet ajout, on est conduit à analyser finement le contenu spectral de l'excitation du pont par les pas des piétons.
- C'est l'étude des ondes de compression longitudinales à travers la structure du pont qui débute la deuxième partie. S'ensuit l'établissement de l'équation d'onde pour la propagation d'ondes transversales le long d'une corde tendue.
- Dans la troisième partie, on modifie l'équation différentielle établie précédemment pour tenir compte de la rigidité interne de la structure. L'étude des modes propres d'oscillation de la passerelle est alors réalisée.

De difficulté modérée, cet énoncé aborde essentiellement les oscillateurs et les ondes mécaniques. Il est proche du cours et contient peu d'applications numériques. Quelques analyses de courbes nécessitent un peu d'entraînement ou de bon sens.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Remarquer que $x = \ell = \text{OG}$. L'expression de \tilde{x} est obtenue en cherchant la position d'équilibre.
- 2 La prise en compte de l'effet du vent revient à changer α en $\alpha - \beta$.
- 3 On peut poser indifféremment $\underline{F}_1 = F_1$ ou $\underline{F}_1 = -F_1$.
- 4 Inutile de dériver $|\underline{H}|$ par rapport à Ω , il suffit de dériver $(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2$.
- 5 Remarquer que pour $\xi^2 \ll 1$, $\omega_r \simeq \omega_0$. Utiliser les propriétés d'une résonance aiguë pour estimer graphiquement la valeur de ξ .
- 8 Le spectre d'un signal périodique possède une propriété particulière, que seul un des spectres proposés vérifie. Remarquer que les autres spectres violent le théorème de Shannon (ce qui entraîne l'apparition de pics fantômes).

Partie II

- 11 S'aider d'un schéma pour relier ΔL à $X(x + dx, t)$, $X(x, t)$, x et dx . Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en dx . Noter ensuite que $L = dx$.
Invoquer le principe des actions réciproques pour montrer que la force exercée par la partie à gauche de la tranche est $-\vec{F}(x, t)$. Réaliser un développement limité à l'ordre 1 en dx .
- 12 Projeter l'équation vectorielle obtenue sur \widehat{u}_x .
- 13 Projeter l'équation vectorielle obtenue à la question 12 sur \widehat{u}_y . Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en dx .

Partie III

- 15 Montrer que $g(t)$ est solution de l'équation $g''(t) - \kappa g(t) = 0$ où κ est une constante. Utiliser l'hypothèse des très petits déplacements (devant h ou b) pour déterminer le signe de κ et reconnaître une équation d'oscillateur harmonique.
- 16 L'équation différentielle vérifiée par f est homogène, linéaire, du quatrième ordre. Le cours de mathématiques indique que f est une combinaison linéaire de quatre fonctions indépendantes. Il suffit alors de montrer que les quatre fonctions apparaissant dans la combinaison linéaire proposée sont bien solutions de l'équation différentielle.
- 17 Commencer par déterminer les valeurs de A et C en utilisant les conditions en $x = 0$. Les conditions en $x = L$ permettent de trouver D, puis la condition de quantification.
- 18 Certains modes semblent présenter une dépendance à la coordonnée z qui n'est pas prise en compte dans le modèle. Les autres modes rappellent ceux de la corde de Melde.

LE MILLENIUM BRIDGE

I. OSCILLATEUR SIMPLE

1 Appliquons la loi de la quantité de mouvement au barycentre G, de masse m , dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \dot{x} \widehat{u}_x - mg \widehat{u}_x - k(\ell - \ell_0) \widehat{u}_x$$

D'après l'énoncé, $\ell = OG = x$. Projétons cette relation sur \widehat{u}_x :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$$

Divisons cette égalité par m et posons :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}$$

Il vient $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + g = 0$

Notons \tilde{x} la valeur de x à l'équilibre. Alors,

$$\omega_0^2(\tilde{x} - \ell_0) + g = 0$$

Il s'ensuit que

$$\tilde{x} = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2}$$

Posons $x(t) = X(t) + \tilde{x}$, où $X(t)$ représente la position de G par rapport à sa position à l'équilibre. L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2\left(X + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} - \ell_0\right) + g = 0$$

Après simplification, il apparaît que

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$$

La constante ω_0 est la **pulsation propre**, c'est la pulsation naturelle de l'oscillateur en l'absence d'amortissement. Le coefficient ξ est le **facteur d'amortissement**, il croît proportionnellement avec le coefficient de frottement α .

2 Pour $\xi = 0$, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Il s'agit de l'équation de l'**oscillateur harmonique** de pulsation ω_0 . La solution $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Avec les conditions initiales imposées, on obtient que :

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad B\omega_0 = \dot{X}(0) = V_0$$

Par conséquent,

$$X(t) = X_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (\text{pour } \xi = 0)$$

Pour $0 < \xi < 1$, en cherchant des solutions sous forme $X(t) = A e^{pt}$, on aboutit à l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$

Il s'ensuit que $p = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$

Ainsi, $X(t)$ est de la forme :

$$X(t) = (A \cos \omega_a t + B \sin \omega_a t) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

Cette fois, les conditions initiales se traduisent par

$$A = X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad -A \xi\omega_0 + B \omega_a = \dot{X}(0) = V_0$$

si bien que

$$X(t) = \left(X_0 \cos \omega_a t + \frac{1}{\omega_a} [V_0 + \xi\omega_0 X_0] \sin \omega_a t \right) e^{-\xi\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

On observe des **pseudo-oscillations**.

Enfin, l'ajout d'une force due au vent revient à changer α en $\alpha - \beta$, c'est-à-dire à redéfinir le facteur d'amortissement ξ et à l'écrire :

$$\xi = \frac{\alpha - \beta}{2m\omega_0}$$

Si $\beta > \alpha$, $\xi < 0$ et l'oscillateur devient instable. **Sous l'effet du vent, l'oscillateur peut se mettre à osciller spontanément.**

3 La nouvelle équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) + mg = -F_0 - F_1 \cos \omega t$$

Divisons par m et introduisons X , comme à la question 1,

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

Comme $X = Y - F_0/(m\omega_0^2)$, il vient :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos \omega t$$

En régime sinusoïdal forcé (en posant $\underline{E}_1 = -F_1$), on a :

$$\underline{Y}(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) = \frac{\underline{E}_1}{m}$$

Par conséquent,

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = \frac{1}{-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

donc

$$\underline{H} = \frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

On aurait aussi pu poser $\underline{E}_1 = F_1$. Dans ce cas,

$$\underline{H} = -\frac{1/\omega_0^2}{1 - \Omega^2 + 2i\xi\Omega}$$

4 Une résonance se produit si $|\underline{H}|$ présente un maximum au voisinage d'une pulsation propre de l'oscillateur. Comme