Mines Physique 1 MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cet énoncé présente deux méthodes de propulsion : la propulsion chimique, qui est utilisée par les fusées, et la propulsion par moteur ionique, utilisée pour les satellites et les sondes spatiales.

- La première partie étudie la force de poussée, indépendamment du mode de propulsion. Son expression est obtenue par la loi de la quantité de mouvement appliquée à un système ouvert. On justifie ensuite l'utilisation de fusées à deux étages, plutôt qu'un seul : cette configuration permet d'atteindre des vitesses plus élevées. On calcule enfin le rendement propulsif du moteur d'une fusée en utilisant des méthodes de calcul adaptées à l'étude des systèmes ouverts.
- C'est la propulsion chimique qui fait l'objet de la seconde partie. Après avoir écrit le premier principe de la thermodynamique en système ouvert, on évalue la vitesse maximale des gaz de propulsion.
- La troisième partie étudie le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique. On abandonne la physique des systèmes ouverts pour se concentrer, d'abord, sur le mouvement d'un électron d'un plasma froid, soumis à une onde électromagnétique. C'est l'occasion d'utiliser la force de Lorentz, mais aussi les équations de Maxwell. On en déduit les caractéristiques (puissance, consommation et force de poussée) du moteur ionique. On montre que l'utilisation d'une onde électromagnétique permet d'accélérer les électrons du plasma, mais limite sa densité.
- Dans la courte quatrième partie, on cherche à déterminer si le moteur ionique qui fait l'objet de la partie précédente permet le maintien d'un satellite sur son orbite. Cette partie fait appel au cours de mécanique sur les mouvements à force centrale.

Ce sujet, commun aux trois filières, fait appel aux programmes de première et de deuxième année. Le spectre des thèmes abordés n'est pas très large. Il contient peu de discussions physiques et d'analyses de données, mais fait appel à des méthodes de résolution particulières et à des points de cours. En ce sens, ce sujet constitue un bon problème de révision.

Indications

Partie I

1 On traite la fusée comme un système ouvert.

2 Le gaz qui est éjecté durant dt fait partie de la fusée à l'instant t.

8 La masse m_{c1} correspond à la propulsion chimique et m_{c2} à la propulsion ionique.

9 Dans le référentiel terrestre, la vitesse des gaz éjectés est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Exprimer P_{jet} en fonction de D_m, v, u et dt. Utiliser l'expression de F obtenue à la question 3 pour obtenir P_F.

10 Faire appel à la formule $\eta = P_F/(P_{jet} + P_F)$.

Partie II

12 Les quantités W, W′ et Q sont échangées pendant la durée élémentaire dt.

13 Ici, $\Delta(h + e_c) = 0$. Dans le cas d'un gaz parfait,

$$\Delta h = \frac{\gamma\,R}{M(\gamma - 1)}\,\Delta T$$

14 Le gaz éjecté est de la vapeur d'eau de masse molaire 18 g.mol^{-1}.

Partie III

15 La force de Lorentz magnétique peut être négligée. On le justifie en s'appuyant sur une des équations de Maxwell.

16 Écrire la loi de la quantité de mouvement. Se placer en régime sinusoïdal forcé.

17 Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss et la formule d'analyse vectorielle fournie.

18 Pour avoir propagation, il faut k réel. En déduire une propriété pour k^2.

19 Montrer que $m_e \dfrac{d\overrightarrow{v_e}}{dt} = -e\,\overrightarrow{v_e} \wedge B_0\widehat{u_z}$.

20 Remarquer qu'une onde polarisée rectilignement est la somme de deux ondes polarisées circulairement. Repartir de l'expression de la vitesse obtenue à la question précédente et appliquer la méthode de variation de la constante.

21 On veut que l'onde se propage dans le milieu lorsque sa pulsation est ω_c ; il faut donc que $k^2(\omega_c) > 0$.

22 L'énergie d'un photon de pulsation ω est $\hbar\omega$.

23 Raisonner par analyse dimensionnelle.

24 Traduire la conservation de l'énergie mécanique pour exprimer v en fonction de V_a, puis l'expression de F en fonction de D_m et u.

26 Se contenter d'un ordre de grandeur pour évaluer P_{jet},. On peut, par exemple, utiliser la valeur de v fournie à la question 8.

Partie IV

30 Calculer la durée d'une révolution (à l'aide de l'analogue de la troisième loi de Kepler). Utiliser la valeur de P_{jet} estimer à la question 26.

Aspects de la propulsion spatiale

I. Généralités

1 Par définition, la quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{\rm f}}(t')$ de la fusée, à l'instant t', est le produit de sa masse $m(t')$ à cet instant par sa vitesse $\overrightarrow{v}(t')$ au même instant, dans le référentiel d'étude. Ainsi, en prenant successivement $t' = t$, puis $t' = t + {\rm d}t$, il vient

$$\boxed{\overrightarrow{p_{\rm f}}(t) = m(t)\,\overrightarrow{v}(t) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{p_{\rm f}}(t+\,{\rm d}t) = m(t+\,{\rm d}t)\,\overrightarrow{v}(t+{\rm d}t)}$$

La masse ${\rm D_m}{\rm d}t$ de gaz, éjectée entre les instants t et $t+{\rm d}t$, possède une vitesse à l'instant $t+{\rm d}t$ notée $\overrightarrow{u}$ par rapport à la fusée. La vitesse de la fusée par rapport au sol est $\overrightarrow{v}(t+{\rm d}t)$. Par composition des vitesses, la vitesse du gaz éjecté par rapport au sol est $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(t+{\rm d}t)$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\overrightarrow{p_{\rm g}} = {\rm D_m}\,{\rm d}t\,\left[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(t+{\rm d}t)\right] = {\rm D_m}\,{\rm d}t\,\left[v(t+{\rm d}t) - u\right]\widehat{u_z}}$$

> L'énoncé est déroutant lorsqu'il demande de prendre « pour système la fusée à l'instant t » (ce qui laisse penser que la fusée est vue comme un système fermé), puis invite à la traiter comme un système ouvert. C'est bien cette seconde approche que l'on choisit.

2 Le système {fusée+gaz} est un système fermé entre t et $t+{\rm d}t$. On peut donc lui appliquer la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La somme des forces extérieures à ce système se réduit à son poids $m\,\overrightarrow{g}$. Notons $\overrightarrow{\pi}(t)$ la quantité de mouvement de ce système à l'instant t, dans le référentiel d'étude, alors

$$\lim_{{\rm d}t\to 0} \frac{\overrightarrow{\pi}(t+{\rm d}t) - \overrightarrow{\pi}(t)}{{\rm d}t} = m\,\overrightarrow{g} \qquad (*)$$

Mais $\qquad \overrightarrow{\pi}(t) = \overrightarrow{p_{\rm f}}(t) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\pi}(t+{\rm d}t) = \overrightarrow{p_{\rm f}}(t+{\rm d}t) + \overrightarrow{p_{\rm g}}$

Remplaçons les quantités de mouvement par leur expression établie précédemment,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\pi}(t+{\rm d}t) - \overrightarrow{\pi}(t) &= \overrightarrow{p_{\rm f}}(t+{\rm d}t) - \overrightarrow{p_{\rm f}}(t) + {\rm D_m}{\rm d}t\,\left[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(t+{\rm d}t)\right]\\ &= m(t+{\rm d}t)\overrightarrow{v}(t+{\rm d}t) - m(t)\overrightarrow{v}(t) + {\rm D_m}{\rm d}t\,\left[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(t+{\rm d}t)\right]\end{aligned}$$

Par conservation de la masse $m(t+\,{\rm d}t) = m(t) + {\rm D_m}{\rm d}t$, il apparaît que

$$\overrightarrow{\pi}(t+{\rm d}t) - \overrightarrow{\pi}(t) = m(t)\left[\overrightarrow{v}(t+{\rm d}t) - \overrightarrow{v}(t)\right] + {\rm D_m}{\rm d}t\,\overrightarrow{u}$$

Injectons cette expression dans l'équation $(*)$,

$$m\frac{{\rm d}\overrightarrow{v}}{{\rm d}t} + {\rm D_m}\,\overrightarrow{u} = m\,\overrightarrow{g}$$

Projetons cette équation sur $\widehat{u_z}$ et utilisons $\overrightarrow{u} = -u\,\widehat{u_z}$,

$$\boxed{m\frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} = {\rm D_m}u - m\,g} \qquad (\mathbf{1})$$

3 L'expression établie à la question précédente montre que la fusée est soumise à deux forces : l'une est son poids et l'autre correspond au terme ${\rm D_m}u$, qui s'identifie à la poussée des gaz éjectés. Cette force est bien orientée vers le haut. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{D_m} u}$$

Pour que la fusée décolle, il faut que l'accélération soit positive. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{D_m} u > m\, g}$$

> Puisque $m(t)$ est une fonction décroissante de t, cette condition peut aussi être réécrite en utilisant $m(0) = m_0$,
>
> $$\mathrm{D_m} u > m_0\, g$$

4 L'impulsion spécifique $\mathrm{I_s}$ est la durée pendant laquelle m est éjectée, donc

$$\mathrm{D_m} = \frac{m}{\mathrm{I_s}}$$

car le débit est constant. La poussée est supposée égale au poids utilisé pour définir $\mathrm{I_s}$, si bien que

$$\mathrm{D_m} u = \frac{m}{\mathrm{I_s}}\, u = m\, g$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{I_s} = \frac{u}{g}}$$

> On doit s'assurer rapidement que $\mathrm{I_s}$ possède bien la dimension d'un temps :
>
> $$[\mathrm{I_s}] = \frac{\mathrm{L.T^{-1}}}{\mathrm{L.T^{-2}}} = \mathrm{T}$$

5 Divisons l'équation (**1**) par $m(t)$ et séparons les variables,

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{D_m}\, u}{m(t)}\, \mathrm{d}t - g\, \mathrm{d}t$$

Comme
$$\mathrm{d}m = -\mathrm{D_m}\, \mathrm{d}t$$

Il vient
$$\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}m\, u}{m} - g\, \mathrm{d}t$$

Intégrons entre l'état initial en $t = 0$ et l'état à l'instant t :

$$v(t) - v(0) = u\, \ln\left[\frac{m_0}{m(t)}\right] - g\,(t - 0)$$

d'où
$$\boxed{v(t) = u\, \ln\left[\frac{m_0}{m(t)}\right] - g\, t}$$

> On peut également résoudre cette question en s'appuyant plus explicitement sur la conservation de la masse : $m(t) + \mathrm{D_m}\, t = m_0$. Cela conduit à intégrer l'équation :
>
> $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D_m}\, u}{m(t)} - g = \frac{\mathrm{D_m}\, u}{m_0 - \mathrm{D_m}\, t} - g$$
>
> qui conduit au même résultat.

6 Adaptons le calcul de la question précédente. Cette fois, on prend $g \leftrightarrow 0$, $m_0 \leftrightarrow m_\mathrm{i}$, $v(0) \leftrightarrow v_\mathrm{i}$, $v(t) \leftrightarrow v_\mathrm{f}$ et $m(t) \leftrightarrow m_\mathrm{f}$. Ainsi,