Centrale Maths 1 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Weiss (Professeur agrégé) ; il a été relu par Aurélie Lagoutte (ENS Cachan) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce sujet traite de la caractérisation des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ parmi les fonctions continues sur le segment $[-1\,;1]$. La démonstration est articulée en trois parties.

- La première partie établit différentes propriétés des polynômes de Tchebychev, qui constituent une famille particulière de polynômes orthogonaux. Il s'agit de questions classiques qu'il faut savoir résoudre, de même que les questions analogues concernant les autres familles classiques de polynômes orthogonaux (polynômes de Legendre, Hermite, etc.).
- La deuxième partie s'intéresse aux liens entre la norme infinie d'une fonction polynomiale et celle de sa fonction dérivée. On établit les inégalités de Bernstein et de Markov. La première concerne les polynômes trigonométriques, la seconde les fonctions polynomiales standard. Cette partie fait appel aux propriétés de la fonction sinus et aux résultats sur les polynômes de Tchebychev établis auparavant.
- La troisième partie examine la vitesse d'approximation d'une fonction continue sur le segment $[-1\,;1]$ par des fonctions polynomiales (cette approximation est assurée par le théorème de Weierstrass). On commence par revoir des propriétés des suites à décroissance rapide, puis on fait le lien entre la décroissance rapide des coefficients de Fourier d'une fonction continue, la vitesse d'approximation polynomiale de celle-ci et son éventuel caractère $\mathscr{C}^\infty$.

Les trois parties du sujet dépendent fortement les unes des autres, mais l'énoncé donne le plus souvent possible la possibilité d'interconnecter les résultats de questions, de sorte que l'on ne reste pas bloqué.

Indications

I Polynômes de Tchebychev

I.A.1.b Utiliser des formules trigonométriques, notamment

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

I.A.1.d Pour tout réel x, $\text{Arccos}\,(-x) = \pi - \text{Arccos}\,(x)$.

I.A.3 Procéder par récurrence. Le cas $n = 0$ est à traiter à part, et l'on peut intuiter le coefficient dominant à partir des calculs effectués à la question I.A.1.b.

I.A.4 Écrire un programme récursif en utilisant la relation de récurrence établie auparavant.

I.B.2.a Calculer la limite du quotient des deux fonctions à comparer à l'aide du changement de variable $x = \cos(u)$.

I.B.1.b On rappelle que $\text{Arccos}\,'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$.

I.B.2.b À l'aide de l'équivalent de la question précédente, déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \text{F}_n'(x)$. Utiliser la parité de F_n pour le calcul de $\text{F}_n'(-1)$.

I.B.3 Pour montrer une égalité entre fonctions polynomiales, il suffit de la montrer sur un intervalle ouvert car une fonction polynomiale ne peut avoir plus de racines distinctes que son degré, lequel est fini. Calculer l'expression de $\text{F}_n''(x)$.

I.C.1 Majorer la valeur absolue de la fonction par une fonction intégrable au voisinage de 1 et -1 respectivement.

I.C.3.a Penser à la méthode d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt.

I.C.3.b Considérer deux suites qui vérifient les propriétés et montrer que la norme au carré de leur différence est nulle.

I.C.4 Attention : $\text{T}_0 \neq 2^{1-0}\text{F}_0$! Il faut séparer les cas et calculer explicitement les intégrales, en pensant au changement de variable $y = \text{Arccos}\,(x)$.

II Inégalités de Bernstein et de Markov

II.A.1.a Étudier les variations de $\theta \mapsto \sin(n\theta) - n\sin(\theta)$.

II.A.1.b La fonction sinus est concave sur $[\,0\,;\pi/2\,]$.

II.A.1.e Chercher les solutions de l'équation sur chacun des intervalles $[\,0\,;\pi/(2n)\,]$ et $]\,\pi/(2n)\,;\pi/2\,]$. Remarquer que l'inégalité de la question II.A.1.c est stricte sur ce second intervalle.

II.A.2 Majorer l'expression de $|\text{F}_n'(x)|$ obtenue à la question I.B.1.b sur $]\,-1\,;1\,[$ à l'aide de l'inégalité de la question II.A.1.d. Déterminer les points de $[\,0\,;1\,]$ en lesquels la borne supérieure est atteinte à l'aide de la question II.A.1.e.

II.A.4 Écrire T_n sous forme factorisée.

II.A.5.a Montrer que les deux termes de l'égalité coïncident en les $x_{n,j}$.

II.A.5.b Calculer $\text{T}_n'(x_{n,j})$ puis substituer.

II.B.1 Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

II.B.2.a Combiner II.A.5.b, II.B.1, II.A.4 et II.A.2.

II.B.2.b Appliquer II.B.2.a à M^{-1}P où $\text{M} = \underset{x\in[\,-1\,;1\,]}{\text{Sup}} \sqrt{1-x^2}\,|\text{P}(x)|$.

II.B.3.a Penser à la formule de De Moivre.

II.B.3.d Montrer que $\lim\limits_{\substack{\theta\to 0\\ \theta>0}} \left|\dfrac{\mathrm{T}(\theta_0+\theta)-\mathrm{T}(\theta_0-\theta)}{2\sin(\theta)}\right| = |\mathrm{T}'(\theta_0)|$. Utiliser ensuite les résultats des deux questions précédentes.

II.C La fonction polynomiale P' appartient à E_{n-1}.

III Approximation polynomiale

III.A.1 Étudier $\left(n^{j+2}\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

III.B.2 Afin d'utiliser le théorème de dérivation terme à terme, montrer que la série de fonctions $\sum \alpha_n \mathrm{F}_n^{(k)}$ converge normalement sur $[\,-1\,;1\,]$ pour tout $k \geqslant 1$ à l'aide de l'inégalité de Markov.

III.B.3 Après avoir écrit la définition de $d(f, \mathrm{V}_n)$, faire apparaître le reste d'ordre n de la série de fonctions de terme général $\alpha_n \mathrm{F}_n$.

III.C.1 Se rappeler d'un théorème du cours concernant le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$.

III.C.3 Remarquer que $f(x) = f(\cos(\mathrm{Arccos}\,(x)))$ pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$, puis se servir de la question précédente.

III.D.1 Utiliser la définition de la borne inférieure et considérer ε/n^j.

III.D.2.a Remarquer que l'application $f \mapsto \widetilde{f}$ est linéaire. Calculer ensuite $a_k(\widetilde{\mathrm{P}})$ pour une fonction polynomiale P à l'aide du changement de variable $t = \cos(x)$, et reconnaître le produit scalaire défini dans la partie I.C.

III.D.2.b Considérer la quantité $a_n(\widetilde{f - p_{n-1}})$ avec une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme à la question III.D.1.

Les conseils du jury

Le rapport du jury permet d'établir une liste de points du programme qu'il est capital (et rentable) de bien maîtriser :

- « Savoir rédiger une récurrence, et prendre le temps de le faire, est un exercice de style auquel les candidats doivent savoir se plier plutôt que de survoler les questions. »
- Il est nécessaire « de prendre des valeurs absolues dans les questions de majoration ».
- Les convergences simple, absolue et normale sont différentes.
- Les équivalents sont à justifier.

Concernant la stratégie à adopter le jour du concours, le rapport du jury signale qu'il ne faut pas ignorer les questions relatives à la programmation et au calcul formel. Il conseille également aux candidats de « parcourir l'intégralité du sujet avant de se lancer dans la rédaction de la solution. Cela leur permet de voir quels sont les thèmes abordés et d'abandonner éventuellement une partie pour en attaquer une autre où ils se sentiront plus à l'aise. »

I. Polynômes de Tchebychev

I.A.1.a La fonction cosinus étant définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, la recherche du domaine de définition des fonctions F_n pour n entier se ramène à l'étude du domaine de définition de la fonction arc cosinus, lequel est $[-1\,;1]$ (les fonctions F_n sont des composées de la fonction cosinus avec la fonction à valeurs réelles arc cosinus). Aussi,

$$\boxed{\text{Les fonctions } \mathrm{F}_n \text{ ont pour domaine de définition commun } \mathrm{D} = [-1\,;1].}$$

I.A.1.b Soit x appartenant à D. On a $\mathrm{F}_1(x) = \cos(\mathrm{Arccos}\,(x)) = x$ car la fonction arc cosinus est la bijection réciproque de la restriction à $[0\,;\pi]$ de la fonction cosinus.

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{D} \quad \mathrm{F}_1(x) = x}$$

Calculons $\mathrm{F}_2(x)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_2(x) &= \cos(2\,\mathrm{Arccos}\,(x)) \\ &= 2\cos^2(\mathrm{Arccos}\,(x)) - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{D} \quad \mathrm{F}_2(x) = 2x^2 - 1}$$

puis de façon analogue :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_3(x) &= \cos(3\,\mathrm{Arccos}\,(x)) \\ &= \cos(2\,\mathrm{Arccos}\,(x))\cos(\mathrm{Arccos}\,(x)) - \sin(2\,\mathrm{Arccos}\,(x))\sin(\mathrm{Arccos}\,(x)) \\ &= \mathrm{F}_2(x)\mathrm{F}_1(x) - 2\sin^2(\mathrm{Arccos}\,(x))\cos(\mathrm{Arccos}\,(x)) \\ &= \mathrm{F}_2(x)\mathrm{F}_1(x) - 2\left(1 - {\mathrm{F}_1}^2(x)\right)\mathrm{F}_1(x) \\ \mathrm{F}_3(x) &= (2x^2 - 1)x - 2(1 - x^2)x \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{D} \quad \mathrm{F}_3(x) = 4x^3 - 3x}$$

I.A.1.c Soit n un entier. On calcule successivement

$$\mathrm{F}_n(1) = \cos(n\,\mathrm{Arccos}\,(1)) = \cos(n \times 0) = 1$$

puis $$\mathrm{F}_n(0) = \cos(n\,\mathrm{Arccos}\,(0)) = \cos(n \times \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n \equiv 0 \mod 4 \\ -1 \text{ si } n \equiv 2 \mod 4 \end{cases}$$

et $$\mathrm{F}_n(-1) = \cos(n\,\mathrm{Arccos}\,(-1)) = \cos(n \times \pi) = (-1)^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{F}_n(1) = 1 \quad \mathrm{F}_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n = 0 \mod 4 \\ -1 & \text{si } n = 2 \mod 4 \end{cases} \quad \mathrm{F}_n(-1) = (-1)^n}$$