X Physique 2 PC 2008 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon) ; il a été relu par Rémy Hervé (Professeur agrégé) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Ce sujet présente différents aspects de la microfluidique, qui est une thématique de recherche prometteuse développée ces dernières années. Il s'articule en trois parties.

- Tout d'abord, on étudie le champ de vitesse dans un canal rectangulaire de section micrométrique. On démontre la loi de Hagen-Poiseuille qui est ensuite utilisée tout au long du sujet. Puis on discute les propriétés d'une jonction entre deux canaux. Cette partie est largement abordable car les questions sont directives.
- Dans la deuxième partie, on discute l'analogie entre les canaux microfluidiques et un circuit électrique. On présente successivement un analogue de la résistance, de l'inductance et de la capacité, ainsi que quelques applications comme le tri de gouttes ou le contrôle du déplacement d'un fluide. Cette partie est relativement longue et présente quelques questions difficiles qui nécessitent une bonne compréhension de l'analogie électrique proposée. Elle introduit également la notion de pression capillaire.
- Enfin, dans la dernière partie, on traite des effets de diffusion dans des microcanaux, en utilisant essentiellement des raisonnements d'ordre de grandeur. Cette partie, moins difficile que la précédente, est indépendante du reste du sujet. Il est toujours important de parcourir en entier un énoncé pour pouvoir traiter en priorité les domaines que l'on maîtrise le mieux.

Ce problème ne présente pas de difficultés calculatoires majeures. En revanche, il faut avoir les idées bien claires sur les cours de mécanique des fluides et de diffusion, pour pouvoir les appliquer dans des situations originales.

Indications

Partie I

I.1.4 Projeter l'équation de Navier-Stokes sur l'axe Ox pour montrer que $\partial\mathrm{P}/\partial x$ est une fonction de z uniquement.

I.1.6 Exprimer le débit volumique en fonction de la vitesse moyenne du fluide calculée à la question I.1.5.

I.1.7 La surface des réservoirs étant beaucoup plus grande que la section du canal, la conservation du débit permet de remarquer que leur variation de hauteur est négligeable. On peut alors appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides.

I.2.1 Appliquer la relation de Hagen-Poiseuille pour chaque fluide.

Partie II

II.1.1 Faire l'analogie entre la vitesse du fluide et le vecteur densité de courant électrique.

II.1.2 Quelles sont les forces que doit exercer un opérateur extérieur pour mettre le fluide en mouvement ?

II.2.3 Quel est l'analogue électrique du système considéré ? En déduire l'expression de sa résistance hydraulique.

II.2.6 Comparer l'évolution du débit dans chaque bras quand le nombre de gouttes dans le bras 1 augmente. Pour obtenir la condition demandée dans l'énoncé, il faut travailler sur la distance λ séparant les gouttes dans le bras 1.

II.3.1.b Effectuer un bilan de quantité de mouvement sur le volume de contrôle constitué par le canal.

II.3.2.a Penser à la modélisation d'une bobine réelle.

II.4.1.b L'interface avance à la vitesse $\dot{x}$. Justifier qu'à l'entrée du canal le champ de vitesse peut être supposé uniforme. Utiliser l'incompressibilité du fluide pour relier $\dot{x}$ à la vitesse du point A.

II.4.2.a Montrer que le débit Q s'exprime en fonction du volume d'air par la relation

$$\mathrm{Q}(t) = -\frac{\mathrm{dV_{air}}}{\mathrm{d}t}$$

II.4.1.g Remplacer la condition $\mathrm{Y} \gg 1$ par la condition $\mathrm{Y} \gg \mathrm{dY}/\mathrm{dT}$, en vérifiant a posteriori que la seconde implique la première.

II.5.1 Le système est une association en parallèle de deux condensateurs plans.

II.5.3 Dans quelle direction évolue le fluide ?

Partie III

III.2.2 Écrire l'équation de conservation des traceurs pour le courant total, et remarquer qu'il est égal à la somme des courants de diffusion et de convection.

III.2.3 Dans quelle direction la diffusion et la convection sont-elles en compétition ?

III.2.5 Que penser de la durée caractéristique d'une expérience de mesure de D avec un fluide au repos ?

I. Écoulement de fluide en micro-canal

I.1 Écoulement sous un gradient de pression constant

I.1.1 L'équation de Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}\right)=\rho\,\overrightarrow{g}-\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{P}+\eta\Delta\overrightarrow{v}$$

est l'expression du principe fondamental de la dynamique pour un fluide newtonien incompressible. Elle contient différents termes :

- à gauche, l'accélération de la particule fluide multipliée par sa densité ;
- à droite, les forces volumiques qui s'exercent sur cette particule fluide, à savoir de gauche à droite respectivement la gravité, la force de pression et le terme de viscosité (force de frottement entre les particules fluides).

> L'écriture proposée par l'énoncé est eulérienne : on décrit le mouvement du fluide par les lignes de champ de vitesse. L'accélération d'une particule fluide se décompose en deux termes : la dérivée partielle par rapport au temps en un point donné de l'espace traduit la manière dont varie la vitesse au cours du temps, le second terme dit terme convectif représente l'accélération que peut subir une particule fluide du fait de son déplacement dans un champ de vitesses non uniforme.
>
> On peut également suivre une particule fluide au cours de son mouvement : c'est l'approche lagrangienne, basée sur l'étude de la trajectoire.
>
> Les deux approches sont équivalentes et sont liées par l'identité
>
> $$\frac{\text{D}\overrightarrow{v}}{\text{D}t}=\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}$$

I.1.2 Le nombre de Reynolds est défini comme l'ordre de grandeur du rapport entre le terme convectif et le terme de viscosité

$$\text{Re}=\frac{\rho\,\|(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}\|}{\eta\|\Delta\overrightarrow{v}\|}=\frac{\rho\,\text{U}^2}{\ell}\,\frac{\ell^2}{\eta\,\text{U}}$$

en introduisant la longueur caractéristique ℓ sur laquelle varie la vitesse caractéristique U de l'écoulement. On conclut

$$\boxed{\text{Re}=\frac{\rho\,\text{U}\,\ell}{\eta}}$$

Il permet de quantifier l'effet de la viscosité sur l'écoulement : à haut nombre de Reynolds, le terme visqueux est négligeable devant le terme convectif, et inversement à bas Re. On peut alors simplifier l'équation de Navier-Stokes en conséquence.

Pour déterminer la longueur caractéristique à utiliser, on remarque que lorsque le fluide entre dans le canal, une couche limite se développe proches des parois. Si ces dernières sont trop écartées, les couches limites ne se rejoignent pas et l'écoulement est convectif. En revanche, lorsque le canal est étroit, elles se rejoignent et l'écoulement est dominé par la viscosité. Il faut donc utiliser comme longueur caractéristique la hauteur h du canal, qui est la plus petite des différentes longueurs décrivant le canal.

Pour l'écoulement considéré, le nombre de Reynolds vérifie finalement

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho\,\mathrm{V}_0\,h}{\eta} = 1.10^{-3} \ll 1}$$

On peut donc négliger le terme convectif dans l'équation de Navier-Stokes : l'écoulement est laminaire.

I.1.3 D'après l'énoncé, l'écoulement est dirigé suivant Ox et ne dépend pas de y. Le champ de vitesse s'écrit alors

$$\overrightarrow{v} = v_x(x,z,t)\overrightarrow{e_x}$$

On suppose l'écoulement incompressible. L'équation de conservation de la matière pour le fluide s'écrit alors

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Il en résulte
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Le champ de vitesse ne dépend donc pas de la position x, soit

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v_x(z,t)\,\overrightarrow{e_x}}$$

I.1.4 En régime stationnaire, l'équation de Navier-Stokes pour l'écoulement laminaire se simplifie en

$$\overrightarrow{0} = \rho\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P} + \eta\,\Delta\overrightarrow{v}$$

> L'énoncé suggère de simplifier le terme de convection dans l'équation de Navier-Stokes. Pour cette géométrie, on remarque qu'il est en fait toujours nul : un écoulement à bas nombre de Reynolds est toujours laminaire, mais la réciproque est fausse.

Par projection sur l'axe Ox, on obtient, en utilisant le résultat de la question I.1.3,

$$0 = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

La vitesse v_x ne dépendant que de z, on en déduit que

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = \eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}z^2} = \mathrm{C^{te}}(z)$$

La dérivée partielle de la pression par rapport à x ne dépend pas de x. Par intégration entre les deux extrémités du canal, en notant $\Delta\mathrm{P} = \mathrm{P}(0) - \mathrm{P}(\mathrm{L})$, on trouve

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = -\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{L}}}$$

L'équation différentielle régissant le champ de vitesse v_x s'exprime finalement par

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{1}{\eta}\,\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{L}}}$$