X Maths 2 MP 2006 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Mazoit (Professeur agrégé) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Comme souvent dans les épreuves de Polytechnique, le problème traite d'un thème largement hors programme, le semi-groupe d'évolution et la résolvante associés à un opérateur dissipatif, mais dans un cadre accessible en prépa (la dimension finie). En particulier, le sujet n'utilise pas de mots savants, et peut être entièrement traité sans faire appel à des connaissances hors programme.

- La première partie, brève, fait le lien entre matrices dissipatives (que l'énoncé appelle « matrices s-positives ») et la notion de positivité connue pour les matrices symétriques.
- La deuxième étudie quelques propriétés classiques de la résolvante $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$ d'une matrice s-positive A (qui est, par définition, l'inverse de $\mathrm{A} + \lambda\mathrm{I}$).
- La troisième est une réciproque partielle de la partie précédente, qui montre que certaines des propriétés précédemment établies sur la résolvante sont bien caractéristiques.
- Enfin, à l'aide d'une transformée de Laplace, la quatrième partie traite des relations qui existent entre le semi-groupe d'évolution engendré par $-\mathrm{A}$ (c'est-à-dire la fonction $t \longmapsto \exp(-t\,\mathrm{A})$) et la résolvante.

Ce problème est d'une longueur raisonnable pour un sujet de Polytechnique. Sa principale difficulté réside dans l'originalité des méthodes utilisées.

Indications

Deuxième partie

3 Vérifier que l'application $x \longmapsto (\mathrm{A}+\lambda \mathrm{I})x$ est injective.

4 Pour le calcul de $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$, utiliser la formule sur la comatrice.

5.a Revenir à la définition de $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$.

5.b Au brouillon : composer à gauche et à droite l'égalité à montrer par les inverses de $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$ et $\mathrm{R}_\mu(\mathrm{A})$. En déduire la démonstration à chercher.

6 Préciser « quantitativement » le caractère injectif de $\mathrm{A}+\lambda\mathrm{I}$.

7.a Utiliser la question 5.a.

7.b Montrer que la somme est directe en calculant $\lambda \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})x$ pour $x \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}$.

7.c Utiliser les deux questions précédentes.

8 Pour deviner le résultat à montrer, penser au calcul des dérivées successives de la fonction réelle $x \longmapsto 1/(\lambda+x)$. Pour la démonstration, utiliser la question 5.b.

Troisième partie

9 À l'aide de l'égalité (ii), écrire $\mathrm{F}(1)$ comme le produit de $\mathrm{F}(\lambda)$ avec autre chose.

10.a Composer l'égalité (ii) par $\mathrm{F}(\lambda)^{-1}$ et $\mathrm{F}(\mu)^{-1}$.

10.b Vérifier que $\lambda \longmapsto \mathrm{F}(\lambda)^{-1}$ vérifie le critère de Cauchy lorsque λ tend vers 0.

11 La positivité de $\mathrm{A}\,\mathrm{F}(\lambda)$ résulte de la question 10.b et de l'inégalité (i). Celle de A en découle, du fait que $\lambda\mathrm{F}(\lambda) \longrightarrow \mathrm{I}$ lorsque λ tend vers l'infini.

Quatrième partie

12 Montrer que $(i) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)$. Pour $(i) \Longrightarrow (iii)$, remarquer que

$$\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\exp(-t\mathrm{A})\big)_{|t=0}$$

14 Intégrer judicieusement par parties.

15 Remarquer que $\mathrm{A}^2 = -\mathrm{I}$.

Première Partie

1 L'application de transposition

$$\mathrm{T}: \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ \quad \mathrm{A} \quad \longmapsto {}^t\mathrm{A} \end{cases}$$

est une symétrie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application linéaire involutive (elle vérifie $\mathrm{T} \circ \mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$). Elle admet donc comme polynôme annulateur

$$\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-1)$$

où les polynômes $\mathrm{X}+1$ et $\mathrm{X}-1$ sont premiers entre eux. D'après le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}) \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} + \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})})$$

c'est-à-dire $$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$$

où l'on a noté comme d'habitude $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement : $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace des matrices symétriques (respectivement : antisymétriques) de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier,

> Toute matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit bien de manière unique sous la forme $\mathrm{A}_s + \mathrm{A}_a$, où $\mathrm{A}_s \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_a \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$

> Cette preuve peut paraître assez formelle pour un résultat classique et facile à démontrer en écrivant
>
> $$\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}) + \frac{1}{2}(\mathrm{A} - {}^t\mathrm{A})$$
>
> Elle a cependant le mérite d'être très générale. Elle convient par exemple pour démontrer que l'espace vectoriel des fonctions paires sur $\mathbb{R}$ et celui des fonctions impaires sont supplémentaires : il suffit de considérer l'application $\mathrm{T} : f \longmapsto \widetilde{f}$ où, par définition, $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.

2 Rappelons que dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice A est antisymétrique si et seulement si elle vérifie $(\mathrm{A}x|x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, toute matrice antisymétrique est s-positive.

> En effet, dire qu'une matrice est antisymétrique revient à dire que la forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $(x,y) \longmapsto (\mathrm{A}x|y)$ est antisymétrique, *ie*
>
> $$\forall x,y \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{A}x|y) = -(x|\mathrm{A}y)$$
>
> Comme $\mathbb{R}$ est de caractéristique différente de 2, ceci est également équivalent au fait que la forme bilinéaire $(x,y) \longmapsto (\mathrm{A}x|y)$ est alternée.

En particulier, (comme A_a est antisymétrique), il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{A}x|x) = (\mathrm{A}_s x|x)$$

Ainsi, A est s-positive si et seulement si la matrice symétrique A_s est positive (en tant que matrice symétrique), ce qui est équivalent au fait que le spectre de A_s est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Finalement,

$$\boxed{\text{A est } s\text{-positive si et seulement si les valeurs propres de } \mathrm{A}_s \text{ sont toutes positives ou nulles.}}$$

Deuxième partie

3 Si A est une matrice s-positive et λ un réel strictement positif, on a, pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$

$$\big(\,(\lambda \mathrm{I} + \mathrm{A})x \,\big|\, x\,\big) = \lambda\|x\|^2 + (\mathrm{A}x|x) \geqslant \lambda\|x\|^2 > 0$$

En particulier, pour tout x non nul, $(\lambda\mathrm{I}+\mathrm{A})x$ l'est aussi, ce qui signifie que l'application linéaire $x \longmapsto (\lambda\mathrm{I}+\mathrm{A})x$ est injective. Comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il en résulte que cet endomorphisme est inversible, ou encore

$$\boxed{\text{Pour tout } \lambda > 0, \text{ la matrice } \lambda\mathrm{I} + \mathrm{A} \text{ est inversible.}}$$

4.a Tout d'abord, remarquons que A est antisymétrique, ce qui implique bien évidemment que A est s-positive. En conséquence, il est pertinent de définir $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$. A est inversible (du fait, par exemple que $\det \mathrm{A} = 1 \neq 0$). En conséquence,

$$\boxed{\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} \mathrm{A} = \mathbb{R}^2}$$

Rappelons l'expression de l'inverse d'une matrice inversible de taille 2×2 :
Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Vu que $\det(\lambda\mathrm{I} + \mathrm{A}) = 1 + \lambda^2$, il en résulte que :

$$\boxed{\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A}) = \frac{1}{1+\lambda^2}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}}$$

On en déduit alors que $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$ a une limite lorsque λ tend vers 0 :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to 0} \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda\to 0} \lambda\, \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A}) = 0}$$

> On peut également remarquer que, si A est inversible, alors $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$ a pour limite $\mathrm{R}_0(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{-1}$ lorsque λ tend vers 0.

4.b Remarquons qu'ici aussi, A est antisymétrique, donc s-positive, ce qui rend pertinente la définition de $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{A})$. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On voit alors que $\mathrm{A}e_1 = -e_3$, $\mathrm{A}e_2 = 0$ et $\mathrm{A}e_3 = e_1$, ce qui permet de constater que l'image de A est engendrée par e_1 et e_3, et que son noyau est engendré par e_2.

$$\boxed{\operatorname{Ker} \mathrm{A} = \mathbb{R}\,(0,1,0) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} \mathrm{A} = \operatorname{Vect}\Big((1,0,0)\,,\ (0,0,1)\Big)}$$