Mines Maths 2 MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Perrier (ENS Lyon) ; il a été relu par Paul Pichaureau (Professeur en CPGE) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Le premier problème est consacré à l'étude des principales propriétés des fonctions harmoniques (fonctions de deux variables réelles dont le laplacien est nul). Après avoir donné quelques exemples de fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$, on démontre trois grandes propriétés de ces fonctions :

- Le principe du maximum, qui affirme qu'une fonction harmonique sur un ouvert et continue sur l'adhérence de cet ouvert atteint son maximum sur son bord. Cette propriété n'est démontrée que dans le cas où l'ouvert est un disque.
- La propriété de la moyenne, qui affirme que si f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$, alors pour tout point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $r > 0$:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}((x_0,y_0),r)} f = f(x_0, y_0)$$
- Enfin, le fait que les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$ et bornées sont constantes.

La difficulté de ce problème porte davantage sur la diversité des notions abordées que sur la technicité des questions. C'est un excellent problème de synthèse qui aborde toutes les notions d'analyse au programme.

Le second problème porte sur les difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Étant donnés n points distincts $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ et n autres points distincts $(\mathrm{A}'_1, \mathrm{A}'_2, \ldots, \mathrm{A}'_n)$, on montre l'existence d'un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ envoyant A_i sur A'_i pour tout i. Ce problème demande plus d'initiative et de maîtrise technique que le premier.

Indications

Problème I

3 On peut poser $\alpha = \dfrac{y}{x}$.

4 Montrer la convergence normale de la série de fonctions $\sum {u_n}_{|_{\mathrm{K}}}$.

5 Montrer la convergence normale sur tout compact des séries de fonctions de terme général $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_n}{\partial y}$, puis celles de terme général $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}$ pour montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^2$, et enfin calculer le laplacien de φ.

7 Utiliser le fait que (a_p, b_p) est un maximum local de la fonction $x \mapsto f_p\,(x, b_p)$ et de la fonction $y \mapsto f_p\,(a_p, y)$.

9 Remarquer que le maximum de f respectivement sur D et sur C est atteint respectivement en des (x_0, y_0) et en (x_1, y_1) puis comparer $f_p(x_0, y_0)$ et $f_p(x_1, y_1)$.

10 Calculer le maximum de $f - g$ et de $g - f$.

13 Remarquer que $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est un paramétrage du cercle de rayon ρ.

14 Utiliser le fait que la forme différentielle trouvée à la question précédente est exacte.

15 Intégrer en coordonnées polaires. Commencer par intégrer en θ, utiliser la question précédente, puis intégrer en r.

16 Faire un dessin de la situation décrite dans l'énoncé.

17 Majorer $|f(x_0, y_0) - f(0,0)|$ en fonction d'une intégrale de $|f|$ sur la différence symétrique de deux disques de rayon r. Utiliser la question précédente, puis faire tendre r vers $+\infty$.

Problème II

18 Raisonner par récurrence sur n.

22 Montrer que si $|\lambda| < \dfrac{2\mathrm{M}}{r}$, alors $\theta_{\lambda,r}^{\mathrm{P}}$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

24 Utiliser la question précédente pour construire une suite finie de points P_k du segment $[\mathrm{BB}']$ tels que $\theta_{\lambda,r}^{\mathrm{P}_i}(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}_{i+1}$ et qui laisse les points A_i invariants.

25 Il y a une erreur d'énoncé : il ne s'agit pas de trouver un endomorphisme, mais bien un difféomorphisme.

26 Distinguer les points A_i appartenant au segment $[\mathrm{BB}']$ des autres. La question 24 permet de construire un difféomorphisme échangeant deux points consécutifs du segment et laissant les autres points invariants. Si on numérote les points de ce segment de 1 à n, ce difféomorphisme s'apparente d'un point de vue algébrique à la transposition $(i, i+1)$. Le problème qui se pose est donc de construire la transposition $(1, n)$ à partir des transpositions $(i, i+1)$.

I. Fonctions harmoniques

1 La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$; calculons ses dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \mathrm{e}^{\,x+\mathrm{i}y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \mathrm{i}^2\,\mathrm{e}^{\,x+\mathrm{i}y} = -\mathrm{e}^{\,x+\mathrm{i}y}$$

d'où $$\boxed{\Delta f = 0}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est une fonction polynôme, donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$. Pour tout n, on a

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}(x,y) = n(n-1)(x+\mathrm{i}y)^{n-2}$$

et $$\frac{\partial^2 g_n}{\partial y^2}(x,y) = \mathrm{i}^2\,n(n-1)(x+\mathrm{i}y)^{n-2} = -n(n-1)(x+\mathrm{i}y)^{n-2}$$

d'où $$\Delta g_n = 0$$

On en déduit $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \Delta g_n = 0}$$

2 Comme suggéré par l'énoncé, on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On introduit également la fonction $\widetilde{r}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\widetilde{r}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

> On pourrait, comme on le fait souvent, confondre la *variable* r et le changement de variable $\widetilde{r}$ (qui est une *fonction*), et ce sans être pénalisé lors de la correction. Il peut cependant être de bon ton de faire cette différence, notamment dans les premières questions d'un problème.

On pose $$h(x,y) = u \circ \widetilde{r}\,(x,y)$$

En tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et on peut écrire

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x}\,u' \circ \widetilde{r}$$

ainsi que $$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \widetilde{r}}{\partial x^2}\,u' \circ \widetilde{r} + \left(\frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x}\right)^2 u'' \circ \widetilde{r}$$

et de même pour les dérivées par rapport à y. On trouve alors

$$\Delta h = \Delta \widetilde{r}\,u' \circ \widetilde{r} + \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\widetilde{r}\|^2\,u'' \circ \widetilde{r}$$

Calculons à présent les dérivées partielles de $\widetilde{r}$:

$$\frac{\partial \widetilde{r}}{\partial x}\,(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{r}}{\partial x^2}\,(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Et par symétrie, on trouve les dérivées partielles par rapport à y :

$$\frac{\partial \widetilde{r}}{\partial y}\,(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \widetilde{r}}{\partial y^2}\,(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

On en déduit
$$\|\overrightarrow{\text{grad}}\,\widetilde{r}\|^2 = 1$$
$$\Delta\widetilde{r} = \frac{1}{\widetilde{r}}$$

On trouve alors
$$\Delta h(r) = \frac{1}{r}u'(r) + u''(r)$$

Posons $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Il vient

$$\begin{aligned}
h \text{ est harmonique} &\iff \Delta h = 0\\
&\iff \forall r \in \mathrm{I} \qquad \frac{1}{r}\,u'(r) + u''(r) = 0\\
&\iff \forall r \in \mathrm{I} \qquad u'(r) + r\,u''(r) = 0\\
&\iff \forall r \in \mathrm{I} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,(ru'(r)) = 0\\
h \text{ est harmonique} &\iff \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathrm{I} \qquad u'(r) = \frac{\mathrm{A}}{r}
\end{aligned}$$

Enfin
$$\boxed{h \text{ est harmonique} \iff \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \qquad u(r) = \mathrm{A}\log(r) + \mathrm{B}}$$

3 Sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus (y'\mathrm{O}y)$, si ν est de classe $\mathscr{C}^2$, alors la fonction k qui a été définie par $k(x,y) = \nu(y/x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$. On pose
$$\widetilde{\alpha} : (x,y) \mapsto \frac{y}{x} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{y}{x}$$
On trouve alors, d'après la question précédente,
$$\Delta k = \Delta\widetilde{\alpha}\,u' \circ \widetilde{\alpha} + \|\overrightarrow{\text{grad}}\,\widetilde{\alpha}\|^2\,u'' \circ \widetilde{\alpha}$$
Il reste alors à évaluer les dérivées partielles de $\widetilde{\alpha}$:
$$\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial x}\,(x,y) = -\frac{y}{x^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2\widetilde{\alpha}}{\partial x^2}\,(x,y) = \frac{2y}{x^3}$$
$$\frac{\partial\widetilde{\alpha}}{\partial y}\,(x,y) = \frac{1}{x} \qquad\qquad \frac{\partial^2\widetilde{\alpha}}{\partial y^2}\,(x,y) = 0$$

On en déduit
$$\|\overrightarrow{\text{grad}}\,\widetilde{\alpha}\|^2 = \frac{y^2}{x^4} + \frac{1}{x^2}$$
$$\Delta\widetilde{\alpha} = \frac{2y}{x^3}$$

Par suite
$$\begin{aligned}
k \text{ est harmonique} &\iff \Delta k = 0\\
&\iff \frac{2y}{x^3}\,\nu'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\,\nu''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\,\nu''\left(\frac{y}{x}\right) = 0\\
k \text{ est harmonique} &\iff \frac{2y}{x}\,\nu'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\nu''\left(\frac{y}{x}\right) = 0
\end{aligned}$$

On a alors
$$\begin{aligned}
k \text{ est harmonique} &\iff 2\alpha\nu'(\alpha) + \left(1+\alpha^2\right)\nu''(\alpha) = 0\\
&\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\left(1+\alpha^2\right)\nu'(\alpha)\right) = 0\\
k \text{ est harmonique} &\iff \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \qquad \nu'(\alpha) = \frac{\mathrm{A}}{1+\alpha^2}
\end{aligned}$$

Conclusion :
$$\boxed{k \text{ est harmonique} \iff \exists (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \qquad \nu(\alpha) = \mathrm{A}\,\mathrm{Arctan}\,(\alpha) + \mathrm{B}}$$