CCP Physique 1 MP 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (ENS Lyon) ; il a été relu par Florent Tournus (ENS Lyon) et Pierre Flauder (ENS Lyon).

Ce sujet se compose de deux problèmes totalement indépendants. Il est d'une longueur raisonnable et ne comporte ni questions trop calculatoires, ni difficultés insurmontables.

- Le premier problème est un problème de mécanique. Le système considéré est un régulateur de vitesse, de conception simple. Après quelques considérations sur les liaisons présentes dans le problème, on étudie plus particulièrement la bifurcation qui peut apparaître lorsqu'on utilise ce dispositif. Aucune connaissance sur les bifurcations n'est requise et l'énoncé est très directif.

- Le second problème aborde différents points de thermodynamique. Une première question est consacrée à la thermodynamique du gaz parfait puis une seconde est consacrée au rayonnement thermique. Une troisième utilise les résultats des deux questions précédentes pour étudier un gaz parfait en présence d'un rayonnement. La dernière question, consacrée à l'étude d'un gaz parfait en prenant en compte la gravité, permet de montrer qu'un tel système est thermodynamiquement instable.

Indications

Problème A

A.1.a La puissance d'un torseur nul ne dépend pas du référentiel dans lequel on la calcule.

A.2 Il faut être particulièrement attentif à la différence qui existe entre référentiel et repère pour aborder cet ensemble de quatre sous-questions.

A.2.b Appliquer la relation fondamentale de la dynamique et le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$.

A.3.b Dans $\mathcal{R}'$, A_1 (respectivement A_2) est en rotation autour de O à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (respectivement $-\dot{\theta}$).

A.3.c Attention, la verticale est orientée vers le bas.

A.3.d Il faut considérer les forces d'inertie puisque $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen et notamment la force d'inertie d'entraînement, qui dérive ici d'un potentiel.

A.4.a Les positions d'équilibre correspondent aux extremums de l'énergie potentielle. Une position d'équilibre est stable s'il s'agit d'un minimum de l'énergie potentielle.

Problème B

B.1.a On rappelle que la capacité thermique molaire à volume constant est définie par $\mathrm{C_{vm}} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\mathrm{V}}$ et celle à pression constante par $\mathrm{C_{pm}} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{T}}\right)_{p}$.

B.1.c Utiliser le résultat précédent pour établir la formule demandée.

B.1.d L'énoncé de Kelvin concerne les évolutions cycliques.

B.2.c Partir de l'identité thermodynamique $\mathrm{dU} = \mathrm{T\,dS} - p\,\mathrm{dV}$.

B.4.a La relation à montrer est un résultat classique du problème à deux corps. Pour l'établir rapidement, dans le cas de l'orbite circulaire, exprimer l'énergie potentielle de gravitation puis l'énergie cinétique en fonction de $\dot{\theta}$ et projeter la relation fondamentale de la dynamique sur la direction radiale pour exprimer $\dot{\theta}$ en fonction des autres paramètres.

Pour commenter la phrase, il faut considérer que l'on veut faire redescendre le satellite : l'idée fausse est de croire que si on le freine, il va « tomber ». Lorsqu'on diminue le rayon de son orbite, il tourne plus vite.

Problème A
Un exemple simple de servomécanisme à bifurcation mécanique

A.1.a Le torseur des actions de contact subi par un solide 1 au point de contact C avec un solide 2 s'écrit

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{R}}, \overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{C}}}\right)$$

où $\overrightarrow{\mathrm{R}}$ est la résultante et $\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{C}}}$ le moment en C de ces actions de contact. Au point C, le torseur cinématique de contact est

$$\left(\overrightarrow{\Omega_{\mathrm{r}}}, \overrightarrow{v_{\mathrm{g}}}\right)$$

où $\overrightarrow{v_{\mathrm{g}}}$ est la vitesse de glissement de 1 par rapport à 2 et $\overrightarrow{\Omega_{\mathrm{r}}}$ est le vecteur rotation de 1 par rapport à 2. La puissance de ce torseur s'écrit alors

$$\mathrm{P} = \overrightarrow{\mathrm{R}} \cdot \overrightarrow{v_{\mathrm{g}}} + \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{C}}}$$

Le système que l'on étudie n'est pas un solide puisqu'il peut se déformer. Par ailleurs, le torseur des actions intérieures est la somme des torseurs des actions de contact en A_1, A_2, O et B. Les liaisons étant supposées parfaites, chacun de ces torseurs a une puissance nulle, donc :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathrm{int}} = 0}$$

En vertu du principe de l'action et de la réaction, le torseur des actions intérieures d'un système est toujours nul. Or, on sait que la puissance d'un torseur nul ne dépend pas du référentiel dans lequel on la calcule.

$$\boxed{\text{Quel que soit le référentiel choisi, } \mathrm{P}_{\mathrm{int}} \text{ est nulle.}}$$

Dans notre cas, on peut s'en convaincre rapidement puisque la puissance d'un torseur d'action de contact ne fait intervenir que la cinématique relative entre deux solides, donc est évidemment indépendante du référentiel choisi.

Un torseur nul n'a, en général, pas une puissance nulle. Un exemple simple est un système constitué de deux particules M_1 et M_2 de charge q : chacune exerce sur l'autre une force électrostatique $\pm\overrightarrow{f}$ et le torseur résultant est bien nul (avec deux charges, le moment du torseur, le couple, est nécessairement nul puisque la direction de la force électrostatique est l'axe des deux particules). Et pourtant, sauf si les particules se déplacent à la même vitesse (ce qui n'est pas réalisable en l'absence d'autres « forces »), la puissance correspondante n'est pas nulle puisqu'elle vaut

$$\mathrm{P} = \overrightarrow{f} \cdot \left(\overrightarrow{v}(\mathrm{M}_1) - \overrightarrow{v}(\mathrm{M}_2)\right)$$

A.1.b La liaison avec $\mathcal{B}$ en O est une liaison pivot parfaite, donc elle est non dissipative.

$$\mathrm{P}_{\text{contact } \mathcal{B}} = 0$$

Vu qu'il n'y a pas de glissement, on a

$$\mathrm{P}_{\text{contact } \mathcal{B}} = \overrightarrow{\Omega} \,.\, \overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{O}}}$$

On en déduit alors que la projection du moment $\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{O}}}$ sur l'axe de rotation Oz est nulle

c'est-à-dire $$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{O}}} \,.\, \overrightarrow{u_z} = 0}$$

A.2.a On considère le système $\mathrm{OA_1B}$ de masse m et on cherche le vecteur quantité de mouvement dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Pour des facilités d'écriture, on utilise la base mobile $\left(\overrightarrow{u'_x}, \overrightarrow{u'_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$.

> Profitons de cette question pour insister sur la différence entre un référentiel et un repère. Un référentiel est un **corps matériel** par rapport auquel on « observe » les phénomènes. La définition d'un référentiel, de même que l'écriture des grands principes de la mécanique **ne fait pas** appel à un repère. Un repère est un simple **outil mathématique** qui sert à projeter les relations intrinsèques issues de l'application des principes : on ne doit donc pas parler, entre autres, d'axe d'un référentiel. Pour observer la chute des corps par exemple, il n'y a pas besoin de repère en revanche un référentiel est nécessaire pour voir « par rapport à quoi » les corps tombent.

$$\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{v}(\mathrm{A_1} \in \mathcal{S}/\mathcal{R})$$

Il n'y a que $\mathrm{A_1}$ à considérer pour la quantité de mouvement puisque toute la masse du système est réunie en ce point. Dans $\mathcal{R}$, $\mathrm{A_1}$ a un mouvement circulaire de vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ par rapport à l'axe Oz (car B est fixe).

> Il est important de bien avoir conscience que les quantités $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{L_O}}$ par exemple dépendent du référentiel dans lequel on les calcule. Afin de ne pas trop alourdir les notations, on n'ajoute pas d'indice précisant ce fait quand il s'agit du référentiel $\mathcal{R}$.

Ce qui se traduit par $$\overrightarrow{v}\,(\mathrm{A_1}/\mathcal{R}) = \ell \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u'_y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\ell \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u'_y}}$$

Le moment cinétique en O est défini par $\overrightarrow{\mathrm{L_O}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{P}}$.

Or $$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \ell\left(\sin\theta\,\overrightarrow{u'_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

donc $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{L_O}} = m\,\ell^2\,\dot{\varphi}\,\sin\theta\left(-\cos\theta\,\overrightarrow{u'_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_z}\right)}$$