X Physique 2 PC 2000 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Étienne Reyssat (ENS Ulm) et Olivier Arcizet (ENS Ulm) ; il a été relu par Nathanaël Schaeffer (ENS Lyon) et Fabien Guérin (École Polytechnique).

L'épreuve est composée de quatre parties, non indépendantes, qui vont progressivement faire comprendre le fonctionnement d'un commutateur optique.

- La première partie a pour but de retrouver les résultats classiques du guide d'onde idéal (parois parfaitement conductrices), et d'étudier la propagation des modes transverses.
- La seconde partie étudie un modèle plus réaliste de guide d'onde, qui utilise des parois diélectriques et non plus des métaux parfaits. Le champ n'est alors plus complètement confiné dans le cœur du guide.
- Dans la troisième partie, on couple deux guides d'onde. Ce couplage permet à l'énergie lumineuse de passer d'un guide à l'autre.
- Enfin, la dernière partie présente une façon de maîtriser ce couplage. L'utilisation d'un champ électrique externe influe sur les échanges d'énergie entre les deux guides, ce qui permet de commander le commutateur optoélectronique réalisé.

Ce problème est très abordable dans l'ensemble et fait appel à des méthodes classiques. Avec un peu d'attention dans les calculs, on peut très bien s'en tirer.

Indications

I.1 Utiliser les équations de Maxwell. Se souvenir que dans un milieu linéaire $\overrightarrow{\mathrm{D}} = n^2\varepsilon_0\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$; il n'y a ni courant ni charge dans le diélectrique. Considérer le cas d'ondes dont la dépendance temporelle est de la forme $e^{-i\omega t}$.

I.3.a Examiner les invariances du problème.

I.3.b Injecter l'expression proposée pour le champ électrique dans l'équation obtenue à la première question.

I.3.c Exprimer les conditions aux limites, et donner la condition pour que le système obtenu ait des solutions non triviales (nullité du déterminant).

II.1 Ne pas refaire de calcul, mais reprendre simplement l'équation obtenue dans la question I.1 en remplaçant n par l'indice qui correspond au milieu considéré.

II.2.a Le champ et sa dérivée doivent être continus au passage des interfaces.

II.3 La continuité de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ due à l'absence de courants surfaciques entraîne la continuité de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$, c'est-à-dire de $\dfrac{\partial\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial x}$.

II.4.e Ne pas négliger une application numérique qui peut rapporter des points.

II.5 Se souvenir des lois de Descartes.

III.1 Dériver l'expression proposée, et remplacer les termes dérivés à l'aide des équations différentielles fournies dans l'énoncé.

III.2 Déterminer d'abord les expressions de $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$ et $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2$.

III.3 Calculer les valeurs de A_1 et A_2 à l'entrée du guide, afin de déterminer les constantes trouvées à la question précédente.

IV.2.a Les puissances sont proportionnelles au carré de l'amplitude du champ.

IV.3 Attention : ici E_a est l'argument de la fonction $\delta\beta$. Il ne faut pas chercher à introduire E_a dans l'expression donnée au début de la partie. De plus, il faut se servir du résultat de la question III.4.

IV.4.a Chercher la première annulation de la puissance dans le guide 1.

Première partie : Principe du guidage d'une onde lumineuse

I.1 Il n'y a ni charges libres ni courant dans le GaAs. Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{D}} = 0 \qquad \operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{B}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}} = \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

et on a
$$\overrightarrow{\mathrm{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overrightarrow{\mathrm{E}} = \varepsilon_0 n^2 \overrightarrow{\mathrm{E}}$$

donc, d'après la formule donnée en début d'énoncé :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} &= \overrightarrow{\mathrm{grad}} \operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{E}} - \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{\mathrm{E}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}} \operatorname{div} \frac{\overrightarrow{\mathrm{D}}}{\varepsilon_0 n^2} - \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{\mathrm{E}} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} &= -\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{\mathrm{E}}\end{aligned}$$

Par ailleurs,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} &= -\overrightarrow{\mathrm{rot}} \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathrm{D}}}{\partial t^2} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} &= -\mu_0 \varepsilon_0 n^2 \frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Pour une onde dont la dépendance temporelle est de la forme $e^{-\,i\omega t}$, on a :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \overrightarrow{\mathrm{E}}$$

et on obtient l'équation demandée :

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{\mathrm{E}} + \mu_0 \varepsilon_0 n^2 \omega^2 \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0}$$

> L'existence de courants dans le GaAs serait une cause de dissipation d'énergie. L'onde perdrait alors de la puissance, ce qui est évidemment néfaste pour un guide d'onde.

I.2 Les deux plans qui entourent le cœur sont, dans cette partie, des conducteurs parfaits. Si l'on suppose qu'il n'y a ni charges ni courants surfaciques, le champ électrique s'annule sur les deux plans d'équations $x = d/2$ et $x = -d/2$.

I.3.a Le problème étudié est invariant par translation selon l'axe $(\mathrm{O}y)$, donc $\mathrm{F}(x,y)$ ne dépend pas de y. Lui donner une dépendance en y reviendrait à particulariser certains points, ce qui est contraire à l'invariance par translation du système.

> Il y a aussi une invariance par translation selon $(\mathrm{O}z)$, mais elle est brisée du fait que l'on choisit d'étudier la propagation d'ondes selon cet axe.

I.3.b On va maintenant travailler en notation complexe.
On s'intéresse aux modes transverses :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{Re}\ (\mathrm{F}(x,y)e^{\,i(\beta z-\omega t)})\overrightarrow{e_y}$$

On réinjecte cette expression dans l'équation vectorielle (**1**), et on obtient :

$$\mathrm{F}''(x) + (n^2k^2-\beta^2)\mathrm{F}(x) = 0$$

> Les solutions de l'équation différentielle $f''+\alpha^2 f = 0$ sont de la forme :
> $$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \mathrm{A}e^{\,i\alpha x} + \mathrm{B}e^{-\,i\alpha x} & \text{si } \alpha^2>0 \\ \mathrm{A}e^{\alpha x} + \mathrm{B}e^{-\alpha x} & \text{si } \alpha^2<0 \\ \mathrm{A}x+\mathrm{B} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est :

$$r^2 + n^2k^2 - \beta^2 = 0$$

La solution de l'équation différentielle est soit une combinaison linéaire d'exponentielles réelles (si $n^2k^2-\beta^2<0$), soit une combinaison linéaire de sinusoïdes (si $n^2k^2-\beta^2>0$), soit une fonction affine (si $n^2k^2-\beta^2=0$). Dans le problème, le champ électrique doit s'annuler sur les plans d'équations $x=d/2$ et $x=-d/2$, ce qui impose

$$\mathrm{F}\left(x=\pm\frac{d}{2}\right) = 0$$

La solution affine ne peut pas s'annuler pour deux valeurs différentes de x, donc on ne la retient pas. Si la solution était exponentielle réelle, les conditions aux limites en $x=\pm d/2$ imposeraient :

$$\begin{cases} \mathrm{A}e^{r_1\frac{d}{2}} + \mathrm{B}e^{r_2\frac{d}{2}} & = 0 \\ \mathrm{A}e^{-r_1\frac{d}{2}} + \mathrm{B}e^{-r_2\frac{d}{2}} & = 0 \end{cases}$$

On a un système homogène en A et B qui n'admet que la solution triviale $\mathrm{A}=\mathrm{B}=0$, car son déterminant (qui vaut $2\,\mathrm{sh}\,(r_1-r_2)$) n'est pas nul (sauf si $d=0$, ce qui est bien sûr exclu dans ce problème). On ne doit donc retenir que les cas où la solution de l'équation caractéristique est imaginaire pure, c'est-à-dire $\beta<kn$. On obtient ainsi la condition de guidage :

$$\boxed{0<\beta<kn}$$

I.3.c En posant $\alpha^2 = n^2k^2-\beta^2$, l'expression générale de $\mathrm{F}(x)$ est :